

Ю. Т. ЛИСИЦА

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ОТОБРАЖЕНИЙ,
АППРОКСИМИРУЮЩИХ ДАННЫЙ КОМПАКТ

(Представлено академиком П. С. Александровым 26 I 1973)

Пусть дан компакт Y , лежащий в гильбертовом кубе H , замкнутое множество A пространства X и последовательность непрерывных отображений $f_k: A \rightarrow H$, аппроксимирующая компакт Y в смысле Кристи (см. ниже).

Изучается вопрос о «продолжении» последовательности $\{f_k\}$ в последовательность продолжений $\{F_k: X \rightarrow H\}$, $F_k|_A = f_k$, также аппроксимирующую компакт Y .

Определение 1*. Скажем, что последовательность $\{f_k: A \rightarrow H\}$ аппроксимирует компакт Y , если для любой его окрестности V почти все (т. е. начиная с некоторого номера $n = n(V)$) отображения f_k гомотопны друг другу в V (т. е. для любых $k, l \geq n$ существует гомотопия $h_{k,l}: A \times I \rightarrow V$, связывающая f_k с f_l).

Доказывается (п. 1°), что для паракомпактного пространства X задача продолжения аппроксимирующей ** последовательности сводится к подобной задаче для некоторого сепарабельного метризуемого пространства X' . Далее (п. 2°) показывается, что аналогичная задача продолжения фундаментальных последовательностей в смысле К. Борсука ((²), стр. 225) сводится к исследуемой задаче продолжения аппроксимирующих последовательностей. Наконец (п. 3°), находятся условия, налагаемые на компакт Y , при которых интересующая нас задача продолжения решается положительно в достаточно широком случае. Например, если Y — абсолютный окрестностный ретракт, таким — необходимым и достаточным! — условием является условие *** тривиальности всех гомотопических групп: $\pi_k(Y) = 0$.

1°. Известные факторизационные теоремы С. Мардежича (³) и Б. Пасинкова (⁴) обобщаются следующим образом.

Теорема 1. Пусть даны паракомпакт X , бикомпакт C и отображение **** $H: X \times C \rightarrow Y$ в метризуемое пространство Y . Тогда существуют такие отображения $g: X \rightarrow Z$ и $h: Z \times C \rightarrow Y$, что:

- а) Z метризуемо;
- б) $H = h \circ (g \times e)$, где $e: C \rightarrow C$ — тождество;
- в) $w(Z) \leq w(Y)$, где w — топологический вес;
- г) $\dim Z \leq \dim X$, где $\dim$ — размерность, определенная с помощью покрытий.

Теорему 1 можно распространить далее на счетные последовательности:

Теорема 1'. Пусть в условиях теоремы 1 дано счетное семейство отображений $H_k: X \times C \rightarrow Y$. Тогда существуют одно отображение $g: X \rightarrow Z$ и

* Это понятие было впервые введено даже для более общего случая D. E. Christie ((¹), стр. 285) (mappings towards a space). По-видимому, первым, нашедшим употребление этому понятию (под названием approximative map), был К. Борсук ((²), стр. 246).

** В случае, когда из контекста ясно, какой именно компакт аппроксимируется данной последовательностью, мы будем обозначение этого компакта опускать.

*** Более сильное утверждение см. далее.

**** Пространства у нас всегда хаусдорфовы, а отображения непрерывны.

счетное семейство отображений $h_k: Z \times C \rightarrow Y$, удовлетворяющих условиям а), в), г) и условию

б') $H_k = h_k \circ (g \times e)$ для всех k .

Отсюда и из факторизационной теоремы, доказанной в ⁽⁵⁾, для аппроксимирующих последовательностей вытекает еще одна факторизационная

Теорема * 2. Пусть даны паракомпакт X , замкнутое в нем множество A , компакт Y , лежащий в гильбертовом кубе H , и последовательность отображений $\{f_k: A \rightarrow H\}$, аппроксимирующая Y . Тогда существуют такое отображение $g: X \rightarrow Z$ и последовательность отображений $\{h_k: B \rightarrow H\}$, аппроксимирующая Y , что:

а'') Z — сепарабельно и метризуемо;

д'') $B = \overline{gA}$, где черта означает операцию замыкания;

б'') $f_k = h_k \circ g|_A$ для всех k ;

г'') $\dim B \leq \dim A$ и $\dim(Z \setminus B) \leq \text{rd}(X \setminus A)$, где rd — так называемая носительная размерность (см. ⁽⁵⁾).

Оказывается, задача продолжения аппроксимирующей последовательности $\{f_k\}$ зависит только от гомотопического класса этой последовательности, который мы сейчас определим, следуя ⁽²⁾.

Определение 2. Последовательности $\{f_k: X \rightarrow H\}$ и $\{g_k: X \rightarrow H\}$, аппроксимирующие компакт Y , $Y \subseteq H$, назовем гомотопными, если для любой окрестности V компакта Y отображения f_k и g_k гомотопны в V почти для всех k .

Легко видеть, что отношение гомотопности является отношением эквивалентности на множестве всех последовательностей $\underline{f} = \{f_k: X \rightarrow H\}$, аппроксимирующих Y . Поэтому это множество распадается на классы эквивалентности, которые называют гомотопическими классами (последовательностей). Гомотопический класс последовательности $\underline{f}$ обозначают чертой $[\underline{f}]$.

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 2 даны две гомотопные последовательности $\{f_k: A \rightarrow H\}$ и $\{g_k: A \rightarrow H\}$, а пространство X бинормально ***. Тогда, если одну из них можно продолжить на X в последовательность, аппроксимирующую Y , то и другую тоже.

2°. Рассмотрим связь между аппроксимирующими последовательностями и последовательностями, фундаментальными в следующем смысле.

Определение 3 **.** Пусть Y — подкомпакт гильбертова куба H , а X — замкнутое подмножество некоторого выпуклого множества W некоторого банахова пространства. Последовательность отображений $\{f_k: W \rightarrow H\}$ называют фундаментальной из X в Y , если для любой окрестности V компакта Y существует такая окрестность U множества X , что почти все ограничения $f_k|_U$ гомотопны друг другу в V *****.

Определение 4 **. В тех же условиях последовательности $\{f_k: W \rightarrow H\}$ и $\{g_k: W \rightarrow H\}$, фундаментальные из X в Y , называют гомотопными, если для любой окрестности V компакта Y найдется такая окрестность U множества X , что ограничения $f_k|_U$ и $g_k|_U$ гомотопны в V почти для всех k .

Ясно, что для любой последовательности $\{f_k: W \rightarrow H\}$, фундаментальной из X в Y , ее ограничение $\{f_k|_X\}$ является последовательностью, аппроксимирующей Y , причем ограничения гомотопных последовательностей, фундаментальных из X в Y , будут также гомотопными.

* Она-то и позволяет сводить задачу продолжения с общего случая паракомпактных пространств X к подобной задаче для случая сепарабельных метризуемых пространств.

** Ср. с определением 1.

*** Пространство X бинормально, если произведение $X \times I$ пространства X на отрезок I нормально.

**** См. ⁽⁶⁾, стр. 55.

***** Ср. с определениями 1 и 2.

Оказывается, эта связь с точностью до гомотопии взаимно однозначна, как показывает

Лемма 1. *Всякую последовательность $\{f_k: X \rightarrow H\}$, аппроксимирующую Y , можно продолжить в последовательность $\{f'_k: W \rightarrow H\}$, фундаментальную из X в Y .*

Лемма 2. *Если ограничения (на X) последовательностей $\{f_k: W \rightarrow H\}$ и $\{g_k: W \rightarrow H\}$, фундаментальных из X в Y , гомотопны, то и данные последовательности гомотопны.*

Отсюда следует, что все продолжения (фундаментальные из X в Y) одной и той же последовательности (аппроксимирующей Y) гомотопны друг другу. Более того, из лемм 1 и 2 получается

Теорема 4. *Операция ограничения на X , определенная на множестве всех последовательностей $\underline{f} = \{f_k: W \rightarrow H\}$, фундаментальных из X , $X \subseteq W$, в Y , $Y \subseteq H$, порождает взаимно однозначное соответствие между множеством всех гомотопических классов $[\underline{f}]$ всех таких последовательностей и множеством всех гомотопических классов всех последовательностей, аппроксимирующих Y .*

Определение 5. Пусть в условиях определения 3 дана последовательность $\{f_k: W \rightarrow H\}$, фундаментальная из A в Y , где A замкнуто в X . Последовательность $\{F_k: W \rightarrow H\}$, фундаментальная из X в Y , называется продолжением последовательности $\{f_k\}$, если $F_k|_A = f_k$ для всех k .

Из лемм 1 и 2 и теоремы 3 получаем следующее обобщение одной теоремы Патковской (⁽⁷⁾, стр. 87).

Теорема 5. *Пусть в условиях определений 3 и 5 даны две гомотопные последовательности $\{f_k\}$ и $\{g_k\}$, фундаментальные из A в Y . Тогда, если одну из них можно продолжить в последовательность, фундаментальную из X в Y , то и другую тоже.*

3°. Перейдем к условиям продолжения аппроксимирующих последовательностей.

Определение 6. Компакт Y , лежащий в гильбертовом кубе H , называют аппроксимационно k -связным, если для любой его окрестности V существует такая меньшая его окрестность U , что любое отображение $f: S^k \rightarrow U$ гомотопно в V постоянному отображению $*$.

Лемма 3. *Пусть даны метризуемое пространство X , замкнутое множество A и компакт Y , лежащий в кубе H . Тогда, если Y аппроксимационно k -связен при всех $k \leq n$, а $\dim(X \setminus A) \leq n+1$, то для любой окрестности V компакта Y найдется такая меньшая его окрестность U , что всякое отображение $f: A \rightarrow U$ продолжаемо в отображение $F: X \rightarrow V$ **.*

Теорема 6. *Пусть в условиях леммы 3 пространство X паракомпактно. Тогда, если Y аппроксимационно k -связен при всех $k \leq n+1$, а $\text{rd}(X \setminus A) \leq n+1$, то всякую последовательность $\{f_k: A \rightarrow H\}$, аппроксимирующую Y , можно продолжить на X в последовательность, также аппроксимирующую Y .*

Определение 7 *.** Компакт Y , лежащий в кубе H , называется фундаментальным абсолютным (соответственно абсолютным окрестностным) ретрактом, если последовательность вложений $\{i_k = i: Y \rightarrow H\}$ можно продолжить в последовательность $\{r_k: H \rightarrow H\}$, фундаментальную из H (соответственно из некоторой замкнутой окрестности компакта Y) в Y .

Кратко пишут $Y \in \text{FAR}$ в первом случае и $Y \in \text{FANR}$ — во втором.

Из леммы 3 и теоремы 4.3 (⁽⁸⁾), стр. 271, вытекает

Теорема 7. *Пусть в условиях леммы 3 пространство X параком-*

* См. (⁽⁸⁾), стр. 266. На самом деле определение не зависит от вложения компакта Y в куб H .

** Сравните с леммой 5.1 в (⁽⁸⁾), стр. 272.

*** Это определение также не зависит от вложения компакта Y в куб H . Оно эквивалентно первоначальному определению (⁽⁸⁾, стр. 65), данному К. Борсуком.

пактно, континуум $Y \in \text{FANR}$ и аппроксимационно 1-связен, а $\text{rd}(X \setminus A) \leq n+1$. Тогда всякую последовательность $\{f_k: A \rightarrow H\}$, аппроксимирующую Y , можно продолжить на X в последовательность, аппроксимирующую Y , в том и только том случае, когда $\pi_k(Y) = 0$ для всех $k \leq n$.

Здесь $\pi_k(Y)$ — фундаментальные гомотопические группы компакта Y , введенные К. Борсуком (см. ⁽²⁾, стр. 252). Если $Y \in \text{ANR}$, то $\pi_k(Y) = \pi_k(Y)$, где $\pi_k(Y)$ — обычные гомотопические группы.

Из теоремы о замещении (см. ⁽⁹⁾, стр. 340) получается аналогичная для аппроксимирующих последовательностей

Теорема 8. Пусть в условиях леммы 3 пространство X нормально, а $Y \in \text{FANR}$. Тогда для любой последовательности $\{f_k: A \rightarrow H\}$, аппроксимирующей Y , существуют такое конечное открытое покрытие γ пространства X , подполидр K нерва N_γ покрытия γ и последовательность $\{\varphi_k: K \rightarrow H\}$, аппроксимирующая Y , что для любого барицентрического отображения $g: X \rightarrow N_\gamma$ непременно $g(A) \subseteq K$, а последовательности $\{f_k\}$ и $\{\varphi_k \circ g|_A\}$ гомотопны.

Отсюда и из теоремы 3 вытекает

Теорема 9. Для каждого компакта $Y \in \text{FANR}$ существует такой конечный полидр P , что $\dim P \leq \dim Y$ и $P \succ Y$.

Здесь $P \succ Y$ означает, что P фундаментально доминирует над Y в смысле К. Борсука (см. ⁽¹⁰⁾, стр. 25). Если $Y \in \text{ANR}$, то фундаментальное доминирование в данном случае эквивалентно гомотопическому.

Из теорем 7 и 8 следует

Теорема 10. В условиях теоремы 7 всякую последовательность $\{f_k: A \rightarrow H\}$, аппроксимирующую Y , можно продолжить на X в последовательность, также аппроксимирующую Y , тогда и только тогда, когда $\pi_k(Y) = 0$ для всех k .

Определение 8. Компакт Y , лежащий в кубе H , называется подвижным, если для каждой его окрестности V существует такая его окрестность U , что для всякой его окрестности W найдется гомотопия $h: U \times I \rightarrow V$, удовлетворяющая двум условиям: $h(u, 0) = u$ и $h(u, 1) \in W$ для всех $u \in U^*$.

Из леммы 3 и одной теоремы К. Борсука (см. ⁽¹⁰⁾, стр. 110) вытекает следующая

Теорема 11.** Континуум $Y \in \text{FAR}$ тогда и только тогда, когда он подвижен, аппроксимационно 1-связен и $\pi_k(Y) = 0$ для всех k .

Заметим, что отсюда вытекает возможность замены в теореме 9 условия $Y \in \text{FANR}$ более слабым условием подвижности.

Теорема 12. Пусть в условиях леммы 3 континуум $Y \in \text{FANR}$ и аппроксимационно 1-связен. Тогда, если $\pi_k(Y) = 0$ для всех $k \leq m-1$, а $\dim(X \setminus A) \leq n+1$, то всякую последовательность $\{f_k: A \rightarrow H\}$, аппроксимирующую Y , можно продолжить в последовательность $\{F_k: U \rightarrow H\}$, также аппроксимирующую Y , на некоторую такую окрестность U множества A , что $\dim(X \setminus U) \leq n-m$.

В заключение хочу выразить благодарность проф. Ю. М. Смирнову за внимание к моей работе, за ценные советы и помощь.

Университет дружбы народов
им. П. Лумумбы
Москва

Поступило
26 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ D. E. Christie, Trans. Am. Math. Soc., 56, 275 (1944). ² K. Borsuk, Fund. Math., 62, 223 (1968). ³ S. Mardešić, Illinois J. Math., 4, 278 (1960). ⁴ Б. А. Пасынков, Fund. Math., 60, 285 (1967). ⁵ Ю. Т. Лисица, Сибирск. матем. журн., № 1 (1973). ⁶ K. Borsuk, Fund. Math., 64, 55 (1969). ⁷ H. Patkowska, ibid., 64, 87 (1969). ⁸ K. Borsuk, ibid., 67, 265 (1970). ⁹ Hu Sze-tsen, Trans. Am. Math. Soc., 64, 336 (1948). ¹⁰ K. Borsuk, Theory of Shape, Arhus, 1970.

* Это определение, равно как и предыдущие, не зависит от вложения в куб H . См. ⁽¹⁰⁾, стр. 65. Всякий фундаментальный абсолютный окрестностный ретракт подвижен.

** Теорема 11 дает положительный ответ на вопрос К. Борсука (⁽⁸⁾, стр. 274).