Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 1

УДК 513.773 МАТЕМАТИКА

С. К. ВОДОПЬЯНОВ, В. М. ГОЛЬДШТЕЙН

СТРУКТУРНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ ПРОСТРАНСТВ W_n^1 И КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 3 VII 1973)

Пусть G есть область, т. е. связное открытое множество в R^n. Обозначим через $W_n^1(G)$ банахово пространство вещественных функций, определенных в G и имеющих обобщенные первые производные, суммируемые по G в степени n (см. ([1])). Ю. Г. Решетняком был поставлен вопрос о том, насколько область G определяется строением пространства $W_n^1(G)$. В данной работе дается частный ответ на этот вопрос.

Рассматриваемые области далее предполагаются ограниченными, что не ведет к уменьшению общности рассуждений.

Пусть G и G' — две области в R^n. Изоморфизм φ^* векторных пространств $W_n^1(G')$ и $W_n^1(G)$ называется структурным, если положительная функция переводится им в положительную и $\varphi^*(1)=1$. (Функция $v\in W_n^1(G')$ называется положительной, если $v(x)\geqslant 0$ почти всюду и строгое неравенство имеет место на множестве положительной меры).

Две области G_1 и G_2 будем называть $(1, n)$-эквивалентными, если отображения

$$\theta_i\colon W_n^1(G_i)\to W_n^1(G_1\cap G_2),\quad \theta_i(v)=v|_{G_1\cap G_2},\quad i=1,\ 2,$$

являются изометрическими изоморфизмами. Легко видеть, что $\mu(G_i|(G_1\cap G_2))=0$ при $i=1, 2$.

Хорошо известно, что квазиконформный гомеоморфизм порождает структурный изоморфизм $\varphi^*\colon W_n^1(G')\to W_n^1(G)$ по формуле $(\varphi^*f)(x)=f(\varphi(x))$, где $f\in W_n^1(G')$.

Основная теорема. *Для всякого структурного 0-непрерывного изоморфизма $\varphi^*\colon W_n^1(G')\to W_n^1(G)$, обратный к которому структурен и 0-непрерывен, существует единственный квазиконформный гомеоморфизм φ области G в R^n, удовлетворяющий условиям:*

1) *область $\varphi(G)$ $(1, n)$-эквивалентна G';*

2) *для всякой функции $\varphi\in W_n^1(G')$ $(\varphi^*f)(x)=f(\varphi(x))$ почти всюду.*

0-непрерывность в нашем случае означает, что всякая сходящаяся почти всюду к нулю последовательность функций переводится изоморфизмом φ^* в почти всюду сходящуюся к нулю последовательность.

Из теоремы следуют основные результаты работ ([3-5]) для алгебр и подалгебр Ройдена. Прямым следствием полученного результата является также теорема об устранимых множествах, содержащая в качестве частного случая результаты работ ([6, 7]).

Доказательство основной теоремы. Используемые свойства структурных отображений можно найти в ([8]).

1) Заметим, что структурный изоморфизм φ^* распространяется до структурного изоморфизма φ^* векторных пространств измеримых функций, определенных на областях G' и G соответственно. Распространение возможно потому, что любая характеристическая функция измеримого подмножества области $G'(G)$ является точной нижней гранью некоторого семейства функций из $W_n^1(G')(W_n^1(G))$. Возникающее соответствие

между характеристическими функциями порождает изоморфизм φ_σ^* σ-алгебры измеримых множеств на G' на σ-алгебру измеримых множеств на G.

Лемма 1. *Существует измеримое отображение φ: $G\to G'$, для которого $\varphi^{-1}(A)=\varphi_\sigma^*(A)$, где A — произвольное измеримое подмножество области G'.*

Лемма является простым следствием известного свойства измеримых функций [9].

Из этой леммы следует, что отображение φ порождает структурный изоморфизм φ^*: $W_n^1(G')\to W_n^1(G)$. Легко видеть, что $\varphi\in W_n^1(G)$.

2. Отображение φ принимает естественные значения (см. [10]) в области G всюду, исключая, быть может, подмножество E нулевой $(1, n)$-емкости [10]. Через E' обозначим соответствующее множество нулевой $(1, n)$-емкости для отображения φ^{-1}.

Пусть $\mathscr{L}_i$ — множество всех точек, принадлежащих $G\setminus E$ и удовлетворяющих условию: через каждую точку $x\in\mathscr{L}_i$ проходит прямая l_x, параллельная i-ой координатной оси, такая, что ограничение отображения φ на $l_x\cap(G\setminus E)$ непрерывно. Заметим, что $\mu(G\setminus\mathscr{L}_i)=0$, $i=1,\ldots,n$ [10, 11].

Лемма 2. *Если $x\in\mathscr{L}_i$, $x'\in G'\setminus E'$ и $\varphi(x)=x'$, то существует окрестность $U(x)$ точки x, на которой φ — гомеоморфизм.*

Доказательство леммы основано на том, что координатные функции отображения φ монотонны [12] в некоторой окрестности точки x. Как известно, монотонная функция класса W_n^1 непрерывна.

Таким образом, отображение φ является гомеоморфизмом на области $\tilde G\subset G$, $\mu(G\setminus\tilde G)=0$. Как следует из [4, 5], отображение φ является квазиконформным гомеоморфизмом на $\tilde G$.

3. Из квазиконформности отображения φ на $\tilde G$ следует выполнение неравенства

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)^2\right]^{n/2}\leqslant K|J(x,\varphi)| \tag{1}$$

почти всюду на $\tilde G$ (см., например, [9]); здесь $J(x,\varphi)$ — якобиан отображения φ, а K — константа, зависящая только от размерности пространства и коэффициента искажения отображения φ.

В случае связности $\tilde G$ это замечание вместе с неравенством (1) показывает, что отображение φ можно считать отображением с ограниченным искажением на всей области G [13]. Всякое отображение с ограниченным искажением открыто и изолировано [13]. В нашем случае из этого следует гомеоморфность отображения φ на области G. Гомеоморфное отображение с ограниченным искажением является квазиконформным гомеоморфизмом.

Доказательство связности области G существенно опирается на результаты работы [10].

В заключение заметим, что области $\varphi(G)$ и G' $(1, n)$-эквивалентны.

Сформулируем без доказательства несколько следствий основной теоремы.

Теорема об устранимых множествах. *Пусть области G_1 и G_2 $(1, n)$-эквивалентны и $G_1\subset G_2$.*

Тогда для всякого квазиконформного отображения φ_1: $G_1\to R^n$ существует единственное, совпадающее с ним на G_1 квазиконформное отображение φ_2: $G_2\to R^n$. Коэффициенты искажения обеих отображений совпадают.

Теорема о граничном соответствии. *Рассмотрим область G, граница ∂G которой устроена следующим образом. Для всякой точки $x\in\partial G$ существует окрестность $U(x)$ точки x в R^n и гомеоморфизм θ_x: $U(x)\to R^n$, квазиконформный на $U\cap G$ и переводящий множество $U\cap\partial G$ в гиперплоскость*

$$L=\{(x_1,\ldots,x_n)\in R^n:\ x_n=0\}.$$

Для всякого квазиконформного отображения единичного шара B на область G существует непрерывное продолжение $\bar{\varphi}$: $\bar{B} \to \bar{G}$ такое, что ограничение $\bar{\varphi}$ на ∂B — гомеоморфизм и сквозное отображение $\theta_x \circ \varphi$ квазиконформно на $\bar{\varphi}^{-1}(U(x) \cap \bar{G})$ для любого отображения θ_x. Коэффициент искажения отображения $\theta_x \circ \bar{\varphi}$ зависит только от коэффициентов искажения отображений θ_x и φ.

Эта теорема является обобщением соответствующего факта из ([11]).

В заключение авторы пользуются случаем выразить благодарность проф. Ю. Г. Решетняку за ряд существенных замечаний и А. Ю. Оболенскому за обсуждение предмета статьи.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
18 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Л. Соболев*, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. [2] *Ю. Г. Решетняк, Б. В. Шабат*, Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда, Л., 1964. [3] *Nakai M. Nagoya*, Math. J., v. 16, 157 (1960). [4] *L. G. Lewis*, Trans. Am. Math. Soc., v. 158, № 2, 481 (1971). [5] *J. Lellong-Ferrand*, C. R., Ser. A, v. 272, № 21, 1390 (1971). [6] *В. М. Миклюков*, ДАН, т. 188, № 3, 525 (1969). [7] *J. Väisäla*, J. Math. and Mech., v. 19, № 1, 49 (1969). [8] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, Л. Г. Пинскер*, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М., 1950. [9] *П. Халмош*, Теория меры, М., 1953. [10] *Ю. Г. Решетняк*, Сибирск. матем. журн., т. 10, № 5, 1109 (1969). [11] *Ю. Г. Решетняк*, Там же, т. 13, № 2, 411 (1972). [12] *Ю. Г. Решетняк*, Там же, т. 8, № 3, 629 (1967). [13] *Г. Д. Мостов*, Сборн. пер., Математика, т. 16, № 5, 105 (1972). [14] *F. W. Gehring, J. Wäisälä*, Acta Math., v. 114, 1 (1965).