

УДК 517.512

МАТЕМАТИКА

Б. И. ГОЛУБОВ

О СХОДИМОСТИ СФЕРИЧЕСКИХ СРЕДНИХ РИССА КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

(Представлено академиком С. М. Никольским 25 VI 1973)

В работе ⁽¹⁾ для средних Рисса критического порядка кратных рядов Фурье автором были получены аналоги классических признаков сходимости Жордана, Юнга, Валле — Пуссена и Салема. В настоящей статье для этих же средних формулируются признаки равномерной сходимости типа Дини — Липшица и Салема.

1. Пусть E_N , $N=1, 2, \dots$, — вещественное евклидово пространство размерности N , точки (элементы) которого будем обозначать через $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_N)$ и т. д. Расстояние между x и y обозначается через $|x-y|$, т. е. $|x-y| = (\sum_{k=1}^N |x_k - y_k|^2)^{1/2}$, а скалярное произведение — через (x, y) , т. е. $(x, y) = \sum_{k=1}^N x_k y_k$. Единичную сферу $\{x: x \in E_N, |x|=1\}$ будем обозначать через σ_N , а куб $\{x: x \in E_N, -\pi \leq x_k \leq \pi, k=1, \dots, N\}$ — через Q_N .

Все функции $f(x)$, $x \in E_N$, ниже будут считаться 2π -периодическими по каждому аргументу x_k , $k=1, 2, \dots, N$. Пространство всех непрерывных функций $f(x)$, $x \in E_N$, будем обозначать через $C(E_N)$.

Разложим функцию $f(x) \in C(E_N)$ в ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum a_n(f) e^{i(n,x)}, \quad a_n(f) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{Q_N} f(x) e^{-i(n,x)} dx, \quad (1)$$

где $n = (n_1, \dots, n_N)$ — целые точки E_N , т. е. все n_k — целые числа.

С. Бохнер ⁽²⁾ впервые рассмотрел для $N \geq 2$ средние Рисса

$$S_R^{(\delta)}(x, f) = \sum_{|n| \leq R} \left(1 - \frac{|n|^2}{R^2}\right)^\delta a_n(f) e^{i(n,x)}, \quad \delta \geq 0, \quad (2)$$

и доказал, что для $\delta > (N-1)/2$ средние (2) при $R \rightarrow +\infty$ равномерно сходятся к функции $f(x)$, если $f(x) \in C(E_N)$. В этой же работе для функций $f(x)$ класса $L^2(Q_N)$ доказан аналог признака Лебега для средних (2) порядка $\delta = (N-1)/2$. Из работ С. Бохнера ⁽²⁾, Э. Штейна ⁽³⁾ и других авторов следует, что иногда естественным аналогом одномерных сумм Фурье при $N \geq 2$ являются средние (2) порядка $\delta = (N-1)/2$.

Для $f(x) \in L(Q_N)$, $N=1, 2, \dots$, положим

$$f_x(t) = \frac{1}{|\sigma_N|} \int_{\sigma_N} f(x+ty) d\sigma_N(y), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где $|\sigma_N|$ обозначает площадь сферы σ_N , а интегрирование в (3) производится по поверхности сферы σ_N . При этом для $N=1$ мы считаем $f_x(t) = \frac{1}{2}[f(x-t) + f(x+t)]$. Таким образом, $f_x(t)$ есть не что иное, как сферические средние В. А. Стеклова функции $t(x)$ радиуса t в точке x .

Введем в рассмотрение модифицированный модуль непрерывности функции $f(x) \in C(E_N)$ следующим образом:

$$\bar{\omega}(\delta, f) = \sup_{x \in E_N} \sup_{0 \leq h \leq \delta} \sup_{-\infty < t < \infty} |f_x(t+h) - f_x(t)|.$$

Из (3) легко следует, что $\bar{\omega}(\delta, f) \leq \omega(\delta, f)$, $\omega(\delta, f) = \sup_{x \in E_N} \sup_{|y| \leq \delta} |f(x+y) - f(x)|$ — обычный модуль непрерывности.

Теорема 1. а) Если $f(x) \in C(E_N)$, $N \geq 1$, и $\bar{\omega}(\delta, f) \ln(1/\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow +0$, то

$$S_R^{((N-1)/2)}(x, f) \rightarrow f(x), \quad R \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

равномерно относительно $x \in E_N$.

б) Для любого $N=1, 2, \dots$ существует функция $f(x) \in C(E_N)$, для которой $\bar{\omega}(\delta, f) = O\left(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\right)$, $\delta \rightarrow +0$, но средние $S_R^{((N-1)/2)}(x, f)$ не сходятся в точке $x=0$ к $f(0)$.

Следствие 1. Если $f(x) \in C(E_N)$, $N \geq 1$, и $\omega(\delta, f) \ln(1/\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow +0$, то (4) выполняется равномерно относительно $x \in E_N$.

При $N=1$ следствие 1 превращается в признак Дини — Лишшица о сходимости сумм Фурье, а утверждение п. б) теоремы 1 при $N=1$ принадлежит Лебегу ⁽⁴⁾ (см. также ⁽⁵⁾). Отметим, что аналог признака Дини — Лишшица для двойных рядов Фурье в случае, когда их сходимость определяется через прямоугольные суммы, получен в ⁽⁶⁾, стр. 181.

Утверждение б) теоремы 1 доказывается методом С. М. Никольского ⁽⁵⁾, а утверждение а) является следствием приводимой ниже теоремы 2.

Пусть k — нечетное число. Для $f(x) \in C(E_N)$ положим

$$T_k(x, t, f) = \sum_{j=1}^{k'} \frac{1}{j} \left[f_x \left(t + \frac{j-1}{k} \pi \right) - f_x \left(t + \frac{j\pi}{k} \right) \right],$$

где штрих — суммирование лишь по нечетным значениям индекса.

Теорема 2. Если $f(x) \in C(E_N)$, $N \geq 1$, и $T_k(x, t, f) \rightarrow 0$, $k \rightarrow +\infty$, равномерно относительно $x \in E_N$, $0 \leq t \leq \pi$, то условие (4) выполняется равномерно относительно $x \in E_N$.

При $N=1$ эта теорема принадлежит Салему (см. ⁽⁷⁾, стр. 283).

2. Пусть $\bar{R}_j$, $j=1, 2, \dots, 2^N$, — координатные октанты в системе координат $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ (порядок нумерации произволен). Обозначим через R_j множество всех внутренних точек октанта $\bar{R}_j$, а через $R_j(x_0)$ — сдвиг $x_0 + R_j$ множества R_j на вектор $x_0 \in E_N$. Введем следующее

Определение. Пусть в окрестности $O(x_0)$ точки $x_0 \in E_N$, $N \geq 2$, задана последовательность функций $f_k(x)$ и пусть $f_k(x) \rightarrow f(x)$, $k \rightarrow +\infty$, для

всякого $x \in \bigcap_{j=1}^{2^N} R_j(x_0) O(x_0)$. Пусть существуют пределы $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ x \in R_j(x_0)}} f(x) = f^j(x_0)$, $j=1, \dots, 2^N$. Если существует такой номер j , $1 \leq j \leq 2^N$, что

$\lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow x_0, x \in R_j(x_0)}} f_k(x) < \lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow x_0, x \in R_j(x_0)}} f_k(x)$, то будем говорить, что последовательность $f_k(x)$ обладает явлением Гиббса в точке x_0 .

Эту же терминологию сохраним и для системы функций $f_R(x)$, зависящей от непрерывного параметра $R \geq 0$. Для $N=2$ это определение предложено в ⁽⁸⁾. Для $N=1$, т. е. в одномерном случае, мы считаем, что явление Гиббса определяется обычным способом (см. ⁽¹⁵⁾, стр. 105).

Пусть $\Phi(u)$, $u \geq 0$, $\Phi(0)=0$, — непрерывная, строго возрастающая функция. Будем говорить, что функция $f(x)$, $x \in E_N$, принадлежит классу V_{Φ}^N , если

$$V_{\Phi}(f) = \sup_{\alpha} \sup_{\Pi_{\alpha}} \sum_{r=1}^m \Phi(|f(x^r) - f(x^{r-1})|) < \infty,$$

где $\Pi_{\alpha} = \{x^0, \dots, x^m\}$ — любой конечный набор точек из Q_N таких, что

$$(-1)^{\alpha_k} (x_k^r - x_k^{r-1}) \geq 0, \quad k=1, \dots, N; \quad r=1, \dots, m; \quad m=1, 2, \dots,$$

причем α_k равны 0 или 1, а вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ пробегает все 2^N возможных значений.

При $\Phi(u) = u$ класс V_{Φ}^N содержит в себе класс H_N функций N переменных, имеющих ограниченную вариацию на Q_N в смысле Харди ⁽¹⁶⁾. Отметим также, что справедливы вложения

$$V_{u^p}^N \subset V_{u^q}^N \subset V_{\exp(-u-\alpha)}^N \subset V_{\exp(-u-\beta)}^N, \quad 1 \leq p < q < \infty, \quad 0 < \alpha < \beta < \infty, \quad N=1, 2, \dots$$

При этом $V_u^1 = V$ — обычный класс функций одного переменного, имеющих на $[0, 2\pi]$ ограниченную вариацию в смысле Жордана.

В работе ⁽¹⁾ доказано, что у функции $f(x) \in V_{\Phi}^N$ в любой точке $x_0 \in E_N$ существуют пределы по октантам $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in R_j(x_0)} f(x) = f^j(x_0)$ при любом $j = 1, 2, \dots, 2^N$. Если $f^{j_1}(x_0) \neq f^{j_2}(x_0)$ при некоторых $j_1 \neq j_2$, то будем говорить, что функция $f(x)$ разрывна в точке x_0 . В противном случае функцию $f(x) \in V_{\Phi}^N$ будем называть непрерывной в точке x_0 .

Предположим, что $\Phi(u)$ и $\Psi(u)$, $u \geq 0$, — две взаимно дополнительные функции в смысле У. Юнга (см. ⁽⁷⁾, стр. 32).

Теорема 3. а) Если $f(x) \in V_{\Phi}^N$, $N=1, 2$, и $\sum_{k=1}^{\infty} \Psi(1/k) < \infty$, то в каждой точке разрыва функции $f(x)$ средние (2) при $\delta \geq (N-1)/2$ обладают явлением Гиббса.

б) Если $N=1, 2, \dots$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \Psi(1/k) = \infty$, то утверждение п. а) для $\delta = (N-1)/2$ теряет силу в классе V_{Φ}^N .

Следствие 2. а) Если $f(x) \in V_{\Phi}^N$, $N=1, 2$, а $\Phi(u) = u^p$, $1 \leq p < \infty$, или $\Phi(u) = \exp(-u^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$, $0 \leq u < u_0 < 1$, то средние (2) порядка $\delta \geq (N-1)/2$ обладают явлением Гиббса в каждой точке разрыва функции $f(x)$.

б) В классе $V_{\exp(-u^{-1})}^N$, $N=1, 2, \dots$, явление Гиббса для средних (2) порядка $(N-1)/2$ не обязательно имеет место.

Поскольку $H_N \subset V_{u^p}^N$, $1 \leq p < \infty$, $N=1, 2, \dots$, то из следствия 2 вытекает Следствие 3. Для средних (2) порядка $\delta \geq 1/2$ явление Гиббса имеет место в каждой точке разрыва функции $f(x)$, если $f(x) \in H_2$.

Отметим, что для случаев $N=1$, $f(x) \in V$ и $N=2$, $f(x) = f_1(x_1)f_2(x_2)$, где $f_j(x_j) \in V$, $j=1, 2$, наличие явления Гиббса в поведении средних (2) порядка $\delta \geq 0$ установлено в ⁽⁸⁾.

3. Положим

$$A_v(x) = \sum_{|n|^2=v} a_n e^{i(n,x)}, \quad v=0, 1, \dots,$$

причем $A_v(x) = 0$, если равенство $|n|^2 = v$ невозможно при целых $n \in E_N$.

Теорема 4. Если $N=2$ и $\sum_{v=0}^{\infty} |A_v(x)| < \infty$ при всех $x \in E \subset Q_2$, множество E имеет положительную плоскую меру Лебега, то

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left(\sum_{n_1^2+n_2^2=v} |a_n|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Это двумерный аналог теоремы Лузина — Данжуа (см. ⁽⁷⁾, стр. 173). Доказательство опирается на один результат А. Зигмунда ⁽⁹⁾.

4. Известно ⁽¹⁰⁾, что в одномерном случае ряды Фурье функций класса L^2 сходятся почти всюду. Однако в настоящее время нет ответа на вопрос, сходятся ли почти всюду средние $S_R^{(0)}(x, f)$, т. е. сферические частичные суммы ряда (1), если $f(x) \in L^2(Q_N)$, $N \geq 2$ *. Поэтому могут представлять интерес достаточные условия на квадратический модуль непрерывно-

* Для средних $S_R^{(0)}(x, f)$, $\delta > 0$, $N \geq 2$, ответ на этот вопрос положителен ⁽¹¹⁾.

сти функции $f(x) \in L^2(Q_N)$, $N \geq 2$, обеспечивающие сходимость почти всюду сферических частичных сумм ряда (1). Ниже приводится одно из таких условий. Оно получается с помощью многомерного аналога одной теоремы П. Л. Ульянова⁽¹²⁾, который мы сейчас сформулируем.

Пусть функция $\alpha(t) \geq 0$, $0 < t \leq 1$, не возрастает и удовлетворяет

$$\int_0^\delta t^k \alpha(t) dt = O\left(\delta^k \int_\delta^1 \alpha(t) dt\right), \quad \delta \rightarrow +0. \quad (5)$$

Теорема 5. Если $f(x) \in L^2(Q_N)$, $N \geq 2$, и выполнено (5), то условия

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left(\sum_{|n|^2=v} |a_n(f)|^2 \right) \int_{v^{-1/2}}^1 \alpha(t) dt < \infty, \quad \int_0^1 \alpha(t) \|f_x(t) - f(x)\|_{L^2(Q_N)}^2 dt < \infty.$$

равносильны.

Пусть $f(x) \in L^2(Q_N)$ и $\omega_2(\delta, f) = \sup_{|y| \leq \delta} \|f(x+y) - f(x)\|_{L^2(Q_N)}$ — квадратичный модуль непрерывности функции $f(x)$. С помощью теоремы Меньшова — Радемахера (см. (14), стр. 190) из теоремы 5 получаем

Следствие 4. Если $f(x) \in L^2(Q_N)$, $N \geq 2$, и

$$\int_0^1 \omega_2^2(t, f) \frac{\ln(1/t)}{t} dt < \infty, \quad (6)$$

то средние $S_R^{(0)}(x, f)$, т. е. сферические частичные суммы ряда (1), сходятся к $f(x)$ почти всюду.

В частности, условие (6) выполняется, если при каком-либо $\varepsilon > 0$

$$\omega_2(\delta, f) = O\left(\frac{1}{\ln(1/\delta) \cdot [\ln \ln(1/\delta)]^{1/2+\varepsilon}}\right), \quad \delta \rightarrow +0.$$

Из теоремы 5 на основании теоремы Орлича (см. (14), стр. 198) получаем также

Следствие 5. Если $f(x) \in L^2(Q_N)$, $N \geq 2$, и

$$\int_0^1 \omega_2^2(t, f) \frac{\ln^{1+\varepsilon}(1/t)}{t} dt < \infty \quad (7)$$

при каком-либо $\varepsilon > 0$, то ряд

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left(\sum_{|n|^2=v} a_n(f) e^{i(n,x)} \right) = \sum_{v=0}^{\infty} A_v(x, f)$$

сходится почти всюду на Q_N при любой перестановке членов $A_v(x, f)$.

В частности, это имеет место, если $\omega_2(\delta, f) = O(1/\ln^{1+\varepsilon}(1/\delta))$, $\delta \rightarrow +0$, при каком-либо $\varepsilon > 0$. При $N=1$ это доказано П. Л. Ульяновым⁽¹³⁾.

Московский физико-технический институт
Долгопрудный Московской обл.

Поступило
21 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. И. Голубов, Матем. сборн., т. 89, 4, 630 (1972). ² S. Bochner, Trans. Am. Math. Soc., v. 40, 2, 175 (1936). ³ E. M. Stein, Ann. Math., v. 73, 1, 87 (1961). ⁴ H. Lebesgue, Bull. Soc. Math. France, v. 38, 184 (1910). ⁵ С. М. Никольский, ДАН, т. 73, 3, 457 (1950). ⁶ Л. В. Жижиашвили, Сопряженные функции и тригонометрические ряды, Тбилиси, 1969. ⁷ Н. К. Барн, Тригонометрические ряды, М., 1961. ⁸ Min Teh-Cheng, Duke Math. J., v. 17, 2, 83 (1950); v. 17, 4, 477 (1950). ⁹ A. Zygmund, Studia Math., v. 43, 2, 173 (1972). ¹⁰ L. Carleson, Acta Math., v. 116, 1—2, 135 (1966). ¹¹ В. А. Ильин, Дифференциальные уравнения, т. 2, 2, 816 (1966). ¹² П. Л. Ульянов, УМН, т. 8, 6, 133 (1953). ¹³ П. Л. Ульянов, Изв. АН, сер. матем., т. 22, 4, 515 (1958). ¹⁴ С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, М., 1958. ¹⁵ А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М., 1965. ¹⁶ G. H. Hardy, Quart. J. Math., v. 37, 53 (1905).