Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 1

УДК 513.812 *МАТЕМАТИКА*

А. К. ГУЦ

ОТОБРАЖЕНИЯ УПОРЯДОЧЕННОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

(Представлено академиком А. Д. Александровым 4 VII 1973)

В статье А. Д. Александрова ([1]) показано, что всякое гомеоморфное изотонное (т. е. сохраняющее порядок) отображение упорядоченной коммутативной группы Ли на точно такую же группу будет изоморфизмом. В данной заметке мы покажем, что это утверждение верно в случае некоторой специальной некоммутативной группы Ли.

Мы рассматриваем n-мерное пространство Лобачевского $Л^n$, $n\geqslant 2$, в котором задан порядок, инвариантный относительно некоторой транзитивной подгруппы $T(Л^n)$ группы движений.

Геометрически введение порядка в $Л^n$ состоит в том, что каждой точке $x\in Л^n$ сопоставляется множество $P_x\subset Л^n$ с условиями:

1) $x\in P_x$;

2) если $y\in P_x$, то $P_y\subset P_x$;

3) при $x\neq y$ имеем $P_x\neq P_y$. Тогда, записывая отношение $y\in P_x$ как $y\geqslant x$, получаем порядок в $Л^n$.

Инвариантность порядка относительно группы $T(Л^n)$ понимается следующим образом: если $t\in T(Л^n)$, то $t(P_x)=P_{t(x)}$ для любой точки $x\in Л^n$ и любого элемента t.

Мы фиксируем в $Л^n$ точку e, и если M — какое-либо множество в $Л^n$, содержащее точку e, то M_z обозначает множество, полученное из M с помощью некоторого движения $t\in T(Л^n)$, переводящего точку e в точку z, т. е. $M_z=t(M)$. Независимость от выбора элемента t станет очевидной после задания нами группы $T(Л^n)$.

Введем обозначения: $P=P_e$; $P^-=\{y\,|\,y\leqslant e\}$.

Далее все объекты в модели Пуанкаре пространства Лобачевского будем обозначать теми же символами, что и соответствующие им объекты в самом $Л^n$, но со знаком $\wedge$ сверху.

1.1). Пусть $x^1,\ldots,x^n$ — прямоугольные декартовы координаты в эвклидовом n-мерном пространстве E^n. Пусть $\hat{Л}^n=\{x^1>0\}$. Тогда метрика Лобачевского задается следующей дифференциальной формой:

$$ds^2=k^2\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}dx^{i2}}{x^{12}}\quad (x^1>0),\qquad k=\mathrm{const}.$$

Группа $T(Л^n)$ состоит из движений t, которые в модели имеют вид

$$\hat{t}\colon (x^1,\ldots,x^n)\to(\lambda x^1,\lambda x^2+a^2,\ldots,\lambda x^n+a^n),$$

где $\lambda>0$, $a^2,\ldots,a^n$ — числа, сопоставленные движению t.

Рассматриваемая нами группа $T(Л^n)$ является разрешимой некоммутативной группой Ли.

1.2). Пусть l — прямая, проходящая через точку e. Обозначим через Λ множество всевозможных прямых, параллельных прямой l (в некотором заданном направлении). Можем записать, что $\Lambda=\{l_x\,|\,x\in Л^n\}$, где через l_x мы обозначили прямую из Λ, содержащую точку x.

Пусть π — произвольная двумерная плоскость, проходящая через прямую l. Пусть Ψ_π обозначает множество всевозможных эквидистант, лежащих в π и отвечающих прямой l.

Через Ξ_π обозначим множество всех орициклов, лежащих в π и ортогональных прямой l; причем если $h \in \Xi_\pi$, то орицикл h, рассматриваемый как предел окружностей, характеризуется тем, что центры указанных окружностей берутся на луче $l^+ \subset l$, который, исходя из некоторой точки, уходит в направлении параллельности семейства Λ.

Пусть Λ состоит из координатных линий x^1. Тогда $\hat{\Xi}_\pi$ состоит из эвклидовых прямых.

Обозначим через Σ множество всех элементов, полученных из элементов множества $\Sigma_\pi' = \Lambda \cup \Psi_\pi \cup \Xi_\pi$ для любой плоскости π с помощью группы $T(Л^n)$. Т. е. если $\alpha \in \Sigma$, то существует движение $t \in T(Л^n)$ и элемент $\alpha' \in \Sigma_\pi'$ для некоторой плоскости π, что справедливо равенство $\alpha = t(\alpha')$. Можно символически написать

$$\Sigma = T(Л^n)\,[\bigcup_{\pi \supset l} \Sigma_\pi'].$$

Элементы множества Σ будем называть к в а з и п р я м ы м и (для краткости q-прямыми). Можно говорить о луче q-прямой, т. е. о квазилуче, или о q-луче, а также о m-мерных q-плоскостях и т. д.

К о н у с о и д о м C с вершиной в точке e называется множество, которое вместе с каждой точкой x содержит целый q-луч, исходящий из точки e и проходящий через x.

Множество называется н о р м а л ь н ы м (или q-выпуклым), если вместе с любыми двумя точками x и y оно содержит весь q-отрезок с концами x и y.

1.3). Наложим следующие условия на порядок:

А) Существует такая окрестность точки e, что в ней пересечение $\overline{P} \cap \overline{P}^-$ не содержит точек, помимо e (через $\overline{P}$ обозначено замыкание множества P);

В) $\overline{P}$ содержит конусоид с вершиной e, имеющий внутренние точки.

Т е о р е м а А. *Если множество P, задающее порядок в $Л^n$, удовлетворяет условиям* А) *и* В), *и f есть гомеоморфное изотонное отображение $Л^n$ на $Л^n$, т. е. $f(P_x) = P_{f(x)}$, то оно изометричное, кроме особого случая, когда P представляет собой «квазицилиндр».*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы дается ниже.

1.4). Пространство $Л^n$ можно заменить группой $T(Л^n)$, и тогда теорема А относится к упорядоченным некоммутативным группам Ли.

Пусть G_n и G_n' — две группы Ли, аналитически изоморфные группе $T(Л^n)$. Пусть на G_n задан инвариантный порядок, т. е. $g(P_x) = P_{g(x)}$. Рассмотрим гомеоморфное изотонное отображение $f\colon G_n \to G_n'$, переводящее единицу группы G_n в единицу группы G_n'. Тогда теорему А можно заменить следующей.

Т е о р е м а А′. *Отображение f есть аналитический изоморфизм G_n в G_n', кроме того случая, когда порядок в G_n задан «квазицилиндром».*

Понятно, можно рассматривать локальный порядок и получить обобщение теорем А и А′.

2.1). Для дальнейшего нам понадобятся следующие подстановки слов: прямая$\to q$-прямая, луч$\to q$-луч, конус$\to$конусоид, выпуклый$\to$нормальный, контингенция$\to q$-контингенция (которая определяется так же, как и контингенция, только с заменой лучей на q-лучи), опорная плоскость$\to$опорная q-плоскость, касательная плоскость$\to$касательная q-плоскость (определения очевидные), $x_1 + x_2 \to$середина q-отрезка с концами x_1 и x_2, параллельный$\to q$-параллельный (или $T(Л^n)$ конгруэнтны, т. е. один объект переводится в другой с помощью группы $T(Л^n)$), параллельный перенос$\to$движение из $T(Л^n)$.

2.2). Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть множество P замкнуто и удовлетворяет условию А). Пусть C — q-контингенция множества P в точке e.*

Тогда:

1) $C \subset P$ и C является замкнутым строго нормальным конусоидом («строго» — значит, граница ∂C не содержит q-прямой);

2) C совпадает с объединением S всех направленных кривых, исходящих из e (см. ([1])).

Теорема 2. *Если f: $Л^n \to Л^n$ — изотонное гомеоморфное отображение «на», то:*

1) для всякой $x \in Л^n$ имеем $f(\overline{P}_x) = \overline{P}_{f(x)}$;

2) если P удовлетворяет А), то $f(C_x) = C_{f(x)}$, где C — q-контингенция множества $\overline{P}$ в точке e.

Доказательства этих теорем следуют из работы ([1]), если обратиться к моделе Пуанкаре пространства Лобачевского. Формально же достаточно сделать в доказательствах теорем 1 и 2 из ([1]) подстановку слов, данную в 2.1), чтобы получить доказательства наших теорем 1 и 2 соответственно.

Итак, исследование непрерывных изотонных отображений сводится к рассмотрению случая, когда порядок в $Л^n$ задан конусоидом.

2.3). Основная часть теоремы А вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. *Если порядок в $Л^n$ задан строго нормальным конусоидом C с внутренними точками, причем $\overline{C} \neq L \times K$, где L — q-луч, а K — конусоид, то изотонное гомеоморфное отображение f: $Л^n \to Л^n$ является изометрическим.*

Доказательство этой теоремы состоит из доказательства теоремы 3 из ([1]), в котором сделаны подстановки слов из 2.1). Начиная с последнего абзаца на стр. 11 из ([1]), мы должны перейти к модели Пуанкаре. Тогда q-плоскость Q, натянутая на q-лучи L и L_1 (см. ([1])), изобразится эвклидовой полуплоскостью. Продолжая $\hat{Q}$ до плоскости, легко получить аффинность $\hat{f}$ на $\hat{Q}$ (принцип продолжения $\hat{f}$ на E^n можно почерпнуть из ([2])), ибо $\hat{f}$ сохраняет на $\hat{Q}$ три семейства эвклидовых прямых. Так же как в ([1]), стр. 12, убеждаемся в аффинности f на $Л^n$. Тогда, пользуясь методом, данным в теореме 2 из ([2]), легко убеждаемся в изометричности отображения f.

2.4). Если E — $(n-1)$-мерная q-плоскость, а L — q-луч, то мы определяем отображение d_{EL}, аналогичное отображению d_{EL} из ([1]). Достаточно в соответствующем определении из ([1]) сделать подстановку слов 2.1).

Теорема 4. *Если $C = L_1 \times \ldots \times L_p \times K$, где L_i — q-лучи, $i = 1, \ldots, p$, а $K \neq L \times K_1$ — конусоид, то всякое гомеоморфное изотонное отображение f: $Л^n \to Л^n$ представляется в виде*

$$f = f_0 \circ d_1 \circ \ldots \circ d_p, \qquad (*)$$

где f_0 есть движение, а d_i есть $d_{E_i L_i}$ (см. ([1])), причем в $(*)$ допустимы любые $d_i = d_{E_i L_i}$.

Доказательство этой теоремы следует из доказательства теоремы 4 из ([1]), если учитывать 2.1) и сделать некоторые уточнения.

Автор благодарит акад. А. Д. Александрова за внимание к данному результату.

Новосибирский государственный университет

Поступило 12 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Д. Александров*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, т. 128 (1972). [2] *А. К. Гуц*, Матем. заметки, т. 13, № 5 (1973).