

УДК 517.947

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. Н. МАСЛЕННИКОВА

**О СКОРОСТИ ЗАТУХАНИЯ ВИХРЯ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
В СЛУЧАЕ ДВУХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 I 1973)

В нашей работе (1) было изучено асимптотическое поведение решения задачи Коши при $t \rightarrow \infty$ для следующей линеаризованной системы Навье — Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - [\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}] - \nu \Delta \mathbf{v} + \text{grad } P = 0, \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

в области

$$\{x \in E_3, t \geq 0\}$$

с начальными данными

$$\mathbf{v}(x, t) |_{t=0} = \mathbf{v}^0(x), \quad \text{div } \mathbf{v}^0 = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{v}(x, t) = (v_1, v_2, v_3)$, $\boldsymbol{\omega}$ — заданный постоянный вектор угловой скорости, который, не ограничивая общности, можно считать равным $(0, \omega, 0)$; $[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение, $\nu = \text{const} > 0$.

В указанной работе была доказана теорема о равномерном по $x \in E_3$ затухании решения со скоростью $O\left(\frac{1}{(\nu t)^{3/2} \omega t}\right)$; одновременно было дано явное представление решения задачи (1), (2).

Оставался открытым вопрос, каким образом будет убывать решение задачи (1), (2), если рассматривать систему (1), зависящую только от двух пространственных переменных, скажем $x = (x_1, x_2)$ или $x = (x_2, x_3)$ (зависимость системы от x_2 мы учитываем, так как выбрали x_2 осью вращения).

Этот же вопрос стоит и для системы С. Л. Соболева (2)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - [\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}] + \text{grad } P = 0, \quad (3)$$
$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

при $\nu = 0$.

В случае трех пространственных переменных в (3) было доказано убывание решения задачи (3), (2) со скоростью $O(1/(\omega t))$. В работе (4) для двух пространственных переменных была доказана лишь ограниченность решения по t при $t \rightarrow \infty$ задачи (3), (2), равномерная на любом компакте по $x \in E_2$.

Трудность при рассмотрении этих вопросов для системы (3) состоит в том, что решение представляется в виде сверток с неабсолютно сходящимися интегралами от осциллирующих функций.

В настоящей работе мы устанавливаем скорость убывания при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для системы (1) в случае двух пространственных переменных. В случае одного пространственного переменного этот вопрос нетрудный, и мы приводим соответствующие результаты в замечаниях 1 и 2.

Итак, рассмотрим решение системы (1) в предположении, что все входящие в нее функции и начальные данные (2) зависят только от двух пространственных переменных $x = (x_1, x_2)$ (или $x = (x_2, x_3)$).

Предполагая начальные данные $v_0(x_1, x_2)$ достаточно быстро убывающими по x при $|x| \rightarrow \infty$ (например, принадлежащими классу $L_1(E_2)$), применяя преобразование Фурье по x и пользуясь теоремой о свертках преобразований Фурье, мы получаем решение задачи (1), (2) в виде

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \int_{E_2} \{v^0(y) K_1(x-y, t) + [v^0(y), K_2(x-y, t)]\} dy, \\ P(x, t) &= \int_{E_2} \{-v_2^0(y) K_3(x-y, t) + v_3^0(y) K_4(x-y, t)\} dy. \end{aligned} \quad (4)$$

Ядра K_i в формулах (4) после однократного интегрирования с переходом к полярным координатам представляются в виде

$$\begin{aligned} K_1(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \lambda e^{-v\lambda^2} [J_0(\Omega_1) + J_0(\Omega_2)] d\lambda, \\ K_{21}(x, t) &= \frac{x_1}{4\pi} \int_0^\infty \lambda^2 e^{-v\lambda^2} \left[\frac{J_1(\Omega_1)}{\Omega_1} - \frac{J_1(\Omega_2)}{\Omega_2} \right] d\lambda, \\ K_{22}(x, t) &\equiv 0, \\ K_{23}(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \lambda (\lambda x_2 + \omega t) e^{-v\lambda^2} \left[\frac{J_1(\Omega_1)}{\Omega_1} - \frac{J_1(\Omega_2)}{\Omega_2} \right] d\lambda, \quad (5) \\ K_3(x, t) &= -\frac{x_1 \omega}{4\pi} \int_0^\infty \lambda e^{-v\lambda^2} \left[\frac{J_1(\Omega_1)}{\Omega_1} + \frac{J_1(\Omega_2)}{\Omega_2} \right] d\lambda, \\ K_4(x, t) &= \frac{\omega}{4\pi} \int_0^\infty e^{-v\lambda^2} [J_0(\Omega_1) - J_0(\Omega_2)] d\lambda, \end{aligned}$$

где

$$\Omega_1 = \sqrt{(\lambda x_2 + \omega t)^2 + \lambda^2 x_1^2}, \quad \Omega_2 = \sqrt{(\lambda x_2 - \omega t)^2 + \lambda^2 x_1^2},$$

J_0 и J_1 — функции Бесселя.

Имеет место следующая

Теорема 1. Если начальные данные $v^0(x_1, x_2) \in L_1(E_2)$ и удовлетворяют естественному условию согласования $\operatorname{div} v^0 = 0$, то решение задачи Коши для однородной системы (1) равномерно по всем $x \in E_2$ убывает при $t \rightarrow \infty$ следующим образом: вектор $v(x, t)$ убывает как $O(1/t^{3/2})$, а функция $P(x, t)$ как $O(1/t)$; при больших t и v , $\omega > 0$ имеют место следующие равномерные оценки:

$$\begin{aligned} |v(x, t)| &\leq \frac{C_1}{vt\sqrt{\omega t}} \|v^0\|_{L_1(E_2)}, \\ |P(x, t)| &\leq \frac{C_2}{\sqrt{vt}\sqrt{\omega t}} \|v^0\|_{L_1(E_2)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где C_1 и C_2 — абсолютные постоянные, не зависящие от v^0 , x и t .

Для доказательства теоремы 1 устанавливаются равномерные во всем E_2 оценки ядер $K(x, t)$ (см. формулы (5)), а затем используется инвариантность нормы в L_1 относительно сдвига.

Равномерные оценки каждого из ядер $K(x, t)$ для вектора $v(x, t)$ имеют вид

$$|K(x, t)| \leq \frac{\operatorname{const}}{vt\sqrt{\omega t}}, \quad (7)$$

а для функции $P(x, t)$ — вид

$$|K(x, t)| \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{vt} \sqrt{\omega t}}, \quad (8)$$

где постоянные одни и те же для всех $x \in E_2$, $t > 0$ для каждого ядра $K(x, t)$.

Для доказательства оценок (7) и (8) устанавливается ряд лемм о равномерном убывании при $t \rightarrow \infty$ интегралов от колеблющихся функций по неограниченному промежутку интегрирования.

Лемма 1. Если $0 < y \leq \omega t$, $|\alpha| \leq |\beta|$, где $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, тогда для интеграла

$$Q(x, t, y) = \int_0^y \cos(\beta z) \frac{\cos(\alpha \sqrt{(\omega t)^2 - z^2})}{\sqrt{(\omega t)^2 - z^2}} dz \quad (9)$$

при большом $t > 0$ имеет место оценка

$$|Q(x, t, y)| \leq C/\sqrt{\omega t},$$

где постоянная C не зависит от x, y, t ; здесь $\alpha = x_1/r$, $\beta = x_2/r$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Заметим, что при $y = t$ интеграл (9) вычисляется в явном виде, $Q = 1/2\pi J_0(\omega t)$, где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Лемма 1 доказывается с помощью представления одной из подынтегральных функций в (9) в виде контурного интеграла Сонина для бесселевых функций:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\alpha \sqrt{(\omega t)^2 - z^2})}{\sqrt{\omega t - z}} &= \left(\frac{\pi \alpha}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{\omega t + z}{\omega t - z}\right)^{1/4} J_{-1/2}(\alpha \sqrt{(\omega t)^2 - z^2}) = \\ &= \left(\frac{\pi \alpha}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{2\pi i} \int_L \exp\left\{\frac{\alpha \omega t}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right) - \frac{\alpha z}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)\right\} \frac{dw}{w^{3/2}}; \end{aligned} \quad (10)$$

здесь контур L в комплексной плоскости $w = \xi + i\eta$ идет из точки $-\infty$ по нижнему берегу отрицательной полуоси ξ , обходит начало координат по окружности и возвращается в $-\infty$ по верхнему берегу той же полуоси.

Подставляя (10) в (9) и интегрируя по z , можно свести задачу к исследованию особенностей подынтегральной функции и равномерным оценкам получающихся при этом интегралов в комплексной области.

Как следует из оценок (6) теоремы 1, вектор $\mathbf{v}(x, t)$ имеет при $t \rightarrow \infty$ убывание порядка $1/(vt)$ за счет вязкости и порядка $1/\sqrt{\omega t}$ за счет члена $[\mathbf{v}, \omega]$, входящего в систему; при этом степени порядков убывания складываются так же, как в случае трех пространственных переменных, что было отмечено нами в (1).

Если член $[\mathbf{v}, \omega]$ в системе (1) отсутствует, то в случае двух пространственных переменных вектор $\mathbf{v}(x, t)$ будет убывать как $O(1/(vt))$, т. е. точно так же, как для уравнения теплопроводности для двух пространственных переменных, что вытекает из явного представления решения, которое в этом случае легко выписывается.

Теорема 1 дает скорость затухания вихря в вязкой жидкости в случае двух пространственных переменных, что видно из формул (4) для решения задачи Коши.

З а м е ч а н и е 1. Если предположить, что система (1) и начальные данные (2) зависят только от x_2 , то в классе убывающих на ∞ по x функций и при выполнении условия согласования $\text{div } \mathbf{v}^0 = 0$ решение задачи Коши будет иметь вид

$$\begin{aligned} v_1(x_2, t) &= \Gamma * [v_1^0(y_2) \cos \omega t - v_3^0(y_2) \sin \omega t], \\ v_3(x_2, t) &= \Gamma * [v_1^0(y_2) \sin \omega t + v_3^0(y_2) \cos \omega t], \end{aligned}$$

$$v_2 \equiv P \equiv 0,$$

где $\Gamma = \frac{1}{2(\pi\nu t)^{1/2}} e^{-x_2^2/(4\nu t)}$, а свертка берется по $x \in E_1$.

Таким образом, решение убывает, как $O(1/t^{1/2})$ за счет члена с вязкостью в системе (1), если начальные данные принадлежат $L_1(E_1)$, причем соответствующие оценки будут равномерными по $x \in E_1$.

З а м е ч а н и е 2. Решение задачи Коши для системы С. Л. Соболева в предположениях замечания 1 имеет вид

$$\begin{aligned} v_1(x_2, t) &= v_1^0(x_2) \cos \omega t - v_3^0(x_2) \sin \omega t, \\ v_3(x_2, t) &= v_3^0(x_2) \cos \omega t + v_1^0(x_2) \sin \omega t, \\ v_2 &\equiv P \equiv 0, \end{aligned}$$

т. е. будет периодической функцией по t .

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
23 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Н. Масленникова, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 126 (1973). ² С. Л. Соболев, Изв. АН СССР, сер. матем., 18, № 1 (1954). ³ В. Н. Масленникова, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 103 (1968). ⁴ В. Н. Масленникова, Математические вопросы гидродинамики вращающейся жидкости и системы С. Л. Соболева, Докторская диссертация, М., 1971.