

УДК 512.726.3

МАТЕМАТИКА

А. НАЗИЕВ

О РЕАЛИЗАЦИИ ДУАЛЬНЫХ КАТЕГОРИЙ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 2 II 1973)

Обозначения: $\mathcal{E}ns$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}c$, $\mathcal{G}r$, $\mathcal{G}lc$ — категории множеств, компактологических пространств ⁽⁸⁾, морфизмы которых в $\mathcal{C}$ отделяют точки, локально-компактных пространств, групп и локально-компактных групп соответственно; $\mathcal{X}^{op}$ — дуальная к категории $\mathcal{X}$; $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

I. 1. Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — категории, $U: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, $V: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ — кофункторы (-контравариантные функторы), $x: 1 \rightarrow VU$, $y: 1 \rightarrow UV$ — функторные морфизмы. Набор $D = (U, V, x, y)$ называется квазидвойственностью (к.д.) между $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, если:

к.д.1 x, y — мономорфизмы;

к.д.2 Ux, Vy — изоморфизмы и $(Ux)(yU) = 1_U$, $(Vy)(xV) = 1_V$. Квазидвойственность называется двойственностью, если x и y — изоморфизмы.

Теорема 1. Пусть $U: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ — кофунктор. Существование кофунктора $V: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ и функторных морфизмов $x: 1 \rightarrow VU$ и $y: 1 \rightarrow UV$ равносильно выполнению следующих двух условий:

1) если $U(\xi)$ — ретракция, то ξ — мономорфизм (ξ — морфизм в $\mathcal{X}$);

2) $\forall Y \in \text{ob } \mathcal{Y} \quad \exists X_Y \in \text{ob } \mathcal{X}$ и $\exists$ биморфизм $y_Y: Y \rightarrow U(X_Y)$ такие, что $\forall X \in \text{ob } \mathcal{X} \quad \forall \psi: Y \rightarrow U(X) \quad \exists! \bar{\psi}: X \rightarrow X_Y$ такой, что $U(\bar{\psi})y_Y = \psi$.

Пусть $D = (U, V, x, y)$ — к.д. между $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, и пусть $Y \in \text{ob } \mathcal{Y}$. Назовем Y D -совершенным, если y_Y — изоморфизм (а категорию $\mathcal{Y}$ D -совершенной, если y — изоморфизм), и U -объектом, если $\exists X \in \text{ob } \mathcal{X}$ такой, что $Y \cong U(X)$.

Теорема 2. Если $\mathcal{X}$ D -совершенна, то $\mathcal{X}^{op}$ эквивалентна полной подкатегории категории $\mathcal{Y}$, образованной U -объектами.

Морфизм $\mu: Y \rightarrow Y_1$ в $\mathcal{Y}$ называется D -расширением объекта Y , если $V(\mu)$ — изоморфизм.

Теорема 3. Пусть $Y \in \text{ob } \mathcal{Y}$. Следующие условия равносильны:

1) Y — U -объект;

2) Y — D -совершенный объект;

3) всякое D -расширение объекта Y есть изоморфизм.

Построим категорию $\mathcal{Y}^D$. Ее объекты — пары (Y, ν) , где Y — D -совершенный объект из $\mathcal{Y}$, а ν — такой морфизм в $\mathcal{X}$ с кообластью $V(Y)$, что $U(\nu)$ — изоморфизм. Ее морфизмы $[\xi]: (Y, \nu) \rightarrow (Y', \nu')$ — морфизмы $\xi: Y \rightarrow Y'$ в $\mathcal{Y}$, для которых $\exists \bar{\xi}$ в $\mathcal{X}$ такой, что $U(\bar{\xi})\nu' = \nu\xi$.

Теорема 4. Существуют функторы $R: \mathcal{Y}^D \rightarrow \mathcal{Y}$, $L: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}^D$ и двойственность (U^D, V^D, x^D, y^D) между $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}^D$ такие, что

1) $L \dashv R$;

2) $V^D L = V$, $R U^D = U$;

3) $R L = U V$;

4) $x_x = (x^D)_x$ для D -совершенных $X \in \text{ob } \mathcal{X}$.

2. Для многих категорий $\mathcal{X}$ удастся найти «конкретную» категорию $\mathcal{Y}$ и квазидвойственность D между $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ так, что $\mathcal{X}$ при этом D -совершенна и, значит, $\mathcal{X}^{op}$ реализуется в виде «категории U -объектов». Например, это имеет место для категорий $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}c$, а также для категорий тихоновских пространств, Q -пространств Хьюитта, равномерных пространств, категории коммутативных колец с единицей. В качестве $\mathcal{Y}$ в последнем

случае берется категория локально-кольцованных пространств, удовлетворяющих некоторым условиям. Более того, вводя «полукольца частных» и «локально-полукольцованные пространства», можно (с помощью квазидвойственностей) получить теорему двойственности для полукольцев, из которой вытекают как теорема 1.7.4 Гротендика ⁽¹⁾, так и теорема Брезуляну — Дьяконеску ⁽⁴⁾.

Приведем теоремы двойственности для категорий $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}c$, которые нам дальше понадобятся. Напомним ⁽⁵⁾, что $*$ -алгебра — это отделимая локально-выпуклая C -алгебра A с непрерывной инволюцией $*$, обладающая системой $\mathcal{P}_A$ непрерывных полунорм p , которые определяют топологию в A и удовлетворяют условиям:

- 1) $p(xy) \leq p(x)p(y)$,
- 2) $p(xx^*) = [p(x)]^2 \forall x, y \in A$.

Мы предполагаем, что A коммутативна и обладает единицей, а под морфизмом $*$ -алгебр понимаем непрерывный унитарный инволютивный гомоморфизм. Для $p \in \mathcal{P}_A$ пусть $N(p) = \{x \in A: p(x) = 0\}$. Назовем $*$ -алгебру K^* -алгеброй, если она полна, и Lc^* -алгеброй, если она полна и удовлетворяет условию (Lc^*) : для любого замкнутого максимального идеала M существуют $a \notin M$ и $p \in \mathcal{P}_A$ такие, что $a \cdot N(p) = \{0\}$.

Теорема 5. $\mathcal{K}^{op}$ эквивалентна категории $\mathcal{K}^* K^*$ -алгебр.

Теорема 6. $\mathcal{L}c^{op}$ эквивалентна категории $\mathcal{L}c^* Lc^*$ -алгебр.

II. 1. Пусть $\mathcal{X}$ — категория, $s: \mathcal{G}r \rightarrow \mathcal{E}ns$ — «стирающий» функтор. Группой ⁽²⁾ (соответственно когруппой ⁽³⁾) категории $\mathcal{X}$ называется всякая пара (X, σ) , где $X \in \text{ob } \mathcal{X}$, а $\sigma: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{G}r$ — кофунктор (соответственно функтор), такая, что $\mathcal{X}(\cdot, X) = s\sigma(\cdot)$ (соответственно $\mathcal{X}(X, \cdot) = s\sigma(\cdot)$). Каждая группа из $\mathcal{X}$ канонически определяет когруппу в $\mathcal{X}^{op}$ и обратно, так что для когрупп верна теорема, дуальная к теореме 4.1 из ⁽²⁾. В силу этого когруппы категории $\mathcal{X}$, обладающей конечными суммами (и значит, нулевым объектом I), отождествляются с наборами (X, ψ, η, ξ) : $X \in \text{ob } \mathcal{X}$, $\psi: X \rightarrow X \oplus X$, $\eta: X \rightarrow X$ и $\xi: X \rightarrow I$, для которых коммутативны диаграммы (∇_X — «кодиагональ»):

$$\begin{array}{ccccc} \begin{array}{ccc} & \sigma & \\ X & \xrightarrow{\psi} & X \oplus X \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \oplus 1 \\ X \oplus X & \xrightarrow{1 \oplus \psi} & X \oplus X \oplus X \end{array} & \begin{array}{ccc} & \delta & \\ X \oplus X & \xrightleftharpoons[\eta \oplus 1]{1 \oplus \eta} & X \oplus X \\ \uparrow \psi & & \downarrow \nabla_X \\ X & \xrightarrow{\xi} & I \rightarrow X \end{array} & \begin{array}{ccc} & \delta & \\ & X & \\ \swarrow 1 \oplus \xi & \downarrow \psi & \searrow \xi \oplus 1 \\ X \oplus I & \rightarrow & X \oplus X \rightarrow I \oplus X \end{array} \end{array}$$

Морфизмами когрупп $[\xi]: (X, \psi) \rightarrow (X', \psi')$ называются морфизмы $\xi: X \rightarrow X'$ в $\mathcal{X}$, удовлетворяющие условию: $\psi' \circ \xi = (\xi \oplus \xi) \circ \psi$ (мы обозначаем (ко)группы парами, поскольку для любых заданных когрупп (X, ψ, η, ξ) и (X', ψ', η', ξ') из равенств $X = X'$, $\psi = \psi'$ вытекает, что и $\eta = \eta'$, $\xi = \xi'$). Пусть $\mathcal{G}r(\mathcal{X})$, $\mathcal{Cogr}(\mathcal{X})$ — категории групп и когрупп над $\mathcal{X}$ соответственно.

Теорема 7. Если $\mathcal{X}^{op}$ эквивалентна $\mathcal{Y}$, то $[\mathcal{G}r(\mathcal{X})]^{op}$ эквивалентна $\mathcal{Cogr}(\mathcal{Y})$.

2. Поскольку $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}c$ обладают произведениями, группы этих категорий описываются указанным образом. Ясно, что $\mathcal{G}r(\mathcal{L}c)$ есть $\mathcal{U}lc$. Назовем компактологической группой группу с компактологией, относительно которой умножение и деление являются компактологическими морфизмами. Тогда $\mathcal{G}r(\mathcal{K})$ есть категория компактологических групп.

Категории $\mathcal{K}^*$ и $\mathcal{L}c^*$, как эквивалентные $\mathcal{K}^{op}$ и $\mathcal{L}c^{op}$ соответственно, обладают суммами. Для $A, B \in \text{ob } \mathcal{K}^*$ пусть $A \otimes B$ есть полное тензорное ε -произведение локально выпуклых пространств A и B , естественным образом наделенное структурой топологической алгебры с инволюцией.

Теорема 8. Для A, B из $\mathcal{K}^*$ (соответственно из $\mathcal{L}c^*$) $A \oplus B$ и $A \otimes B$ изоморфны как топологические алгебры с инволюцией.

Назовем K^* -алгеброй Хопфа (соответственно Lc^* -алгеброй Хопфа) всякую K^* -алгебру (соответственно Lc^* -алгебру) A с морфизмами $\psi: A \rightarrow A \otimes A$ и $\xi: A \rightarrow A$, для которых имеют место коммутативные диаграммы (а) и (в) с $\otimes$ вместо $\oplus$. Сопряжением на алгебре Хопфа назовем морфизм $\eta: A \rightarrow A$, для которого имеет место коммутативная диаграмма (б) с той же заменой. Из теорем 7 и 8 вытекают

Теорема 9. $\mathcal{Glc}^{op}$ эквивалентна категории Lc^* -алгебр Хопфа с сопряжением.

Теорема 10. $[Gr(\mathcal{H})]^{op}$ эквивалентна категории K^* -алгебр Хопфа с сопряжением.

Опуская в предыдущих рассмотрениях все, что касается морфизмов η , ϵ , получим аналогичные теоремы для полугрупп (вместо алгебр Хопфа будут просто бигебры ⁽⁷⁾), откуда в компактном случае вытекают теоремы работ ^(6, 7).

Искренне благодарю проф. Д. А. Райкова за внимание к работе, требовательность и множество полезных замечаний, полностью мной учтенных.

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
28 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Grothendieck, Elements de géométrie algébrique. Publ. Math. IHES, № 4, Paris (1960). ² И. Букур, А. Деляну. Введение в теорию категорий и функторов, М., 1972. ³ П. Габриэль, М. Цисман, Категории частных и теория гомотопий, М., 1972. ⁴ A. Brezuleanu, R. Diaconescu, Rev. Roum. math. pures appl., 14, 311 (1969). ⁵ P. Morris, D. Wulbert, Pacific J. Math., 22, 323 (1967). ⁶ S. Sankaran, S. Selesnik, Semigroup Forum, 3, 108 (1971). ⁷ К. Н. Hofmann, Lecture Notes in Math., № 129 (1970). ⁸ H. Buchwalter, Topologies, bornologies et compactologies. These Doct. sci. math. Fac. Sci. univ. Lyon, 1968.