

Ю. Г. ЕВТУШЕНКО

**ДВА ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 28 VI 1973)

1. Рассмотрим задачи нахождения

$$\min_{x \in X_1} F(x), \quad X_1 = \{x \in E_n: G(x) \leq 0, 0 \leq x\}, \quad (1)$$

$$\min_{x \in X_2} F(x), \quad X_2 = \{x \in E_n: g(x) = 0, h(x) \leq 0, 0 \leq x\}; \quad (2)$$

здесь  $F, G, g, h$  — непрерывно дифференцируемые функции  $n$ -мерного вектора  $x$ , определенные на открытых покрытиях множеств  $X_1, X_2$ ;  $G = \{G^1, G^2, \dots, G^m\} \in E_m, g(x) \in E_s, h(x) \in E_h, E_i$  есть  $i$ -мерное евклидово пространство.

Через  $X_1^0, X_2^0$  обозначим множества строго внутренних точек множеств  $X_1, X_2$  соответственно:

$$X_1^0 = \{x: G(x) < 0, 0 < x\}, \quad X_2^0 = \{x: g(x) = 0, h(x) < 0, 0 < x\}.$$

Пусть  $G_x$  — матрица  $n \times m$ ,  $(i, j)$ -элемент которой равен  $\partial G^j / \partial x^i$ ,  $F_x$  — матрица-столбец  $n \times 1$ ,  $i$ -й элемент которой есть  $\partial F / \partial x^i$ . Символ  $D(z)$  обозначает диагональную матрицу, у которой  $i$ -й диагональный элемент есть  $z^i$ , размерность  $D$  совпадает с размерностью вектора  $z$ . Штрих обозначает транспонирование матрицы.

2. Для численного решения задачи (1) предлагается искать предельные при  $t \rightarrow \infty$  точки решения задачи Коши для системы

$$dx/dt = -D(x) [F_x + G_x w], \quad x(0) = x_0 \in X_1^0; \quad (3)$$

здесь вектор  $w \in E_m$  определяется из решения линейной системы

$$Aw + G_x' D(x) F_x = 0, \quad A = G_x' (D)(x) G_x - D(G). \quad (4)$$

Считаем, что множества  $X_1^0, X_2^0$  не пусты и либо множества  $X_1, X_2$  компактные, либо множества  $Z_i = \{x: F(x) \leq F(x_0), x \in X_i\}, i=1, 2$ , ограниченные.

Обозначим через  $e_i \in E_n$  единичный вектор-столбец, у которого равна единице  $i$ -я координата. Предполагаем, что функции, определяющие  $X_1, X_2$  удовлетворяют усиленным условиям регулярности, т. е. для всех  $x \in X_1$  векторы  $G_x^i$  такие, что  $G^i(x) = 0$  и  $e_i$  такие, что  $x^i = 0$  линейно независимы.

**Лемма 1.** Для всех  $x \in X_1$  определитель системы (4) отличен от нуля.

Предполагаем, что правые части системы (3) удовлетворяют условиям существования и единственности решений для всех  $x \in X_1$ .

Вычислим первые производные функции  $G(x)$  и  $F(x)$  в силу системы (3), получим

$$\dot{G} = -D(G)w, \quad \dot{F} = -\|D(x^{1/2})(G_x w + F_x)\|^2 - \|D((-G)^{-1/2})w\|^2;$$

здесь  $\|z\|^2 = z'z, x^{1/2} = (\sqrt{x^1}, \sqrt{x^2}, \dots, \sqrt{x^n}) \in E_n, (-G)^{1/2} = (\sqrt{-G^1}, \dots, \sqrt{-G^m})$ .

Из этих формул и вида системы (3) следует, что множества  $X_1$  и  $Z_1$  являются положительно инвариантными по отношению к системе (3), т. е. если  $x_0 \in X_1$ , то  $x(x_0, t) \in X_1$ ,  $x(x_0, t) \in Z_1$  для всех  $0 \leq t < \infty$ .

**Теорема 1.** Пусть  $F(x)$ ,  $G(x)$  — строго выпуклые, непрерывно дифференцируемые на  $X_1$  функции, выполнены усиленные условия регулярности; тогда при  $t \rightarrow \infty$  решения (3) сходятся к единственному решению задачи (1) при любых  $x_0 \in X_1^0$ , функция  $F(x(t))$  монотонно убывает вдоль траекторий системы (3).

Множество  $\omega$ -предельных точек  $\omega(x_0)$  не пусто для всех  $x_0 \in X_1^0$  в силу ограниченности либо множества  $X_1$ , либо  $Z_1$ . Для каждого  $x_0 \in X_1^0$  существует единственная точка  $x_* \in \omega(x_0)$ ,  $F_x(x_*) = 0$ . Действительно, в противном случае на односвязном множестве  $\omega(x_0)$  функция  $F(x)$  принимала бы одно и то же значение в нескольких точках, что невозможно в силу строгой выпуклости  $F(x)$ . Если  $x_* \in \omega(x_0)$ ,  $x_* \in X_1^0$ , то  $F_x(x_*) = 0$ , правые части системы (3) обращаются в нуль; в этом случае в точке  $x_*$  выполнены достаточные условия Куна — Таккера минимума  $F(x)$  в задаче (1). Из анализа системы (3) следует, что аналогичная ситуация имеет место, когда  $x_* \in X_1 \setminus X_1^0$ .

3. Метод (3) можно использовать для решения задачи (2). Вид системы (3) для нее останется прежним. Вектор-функцию следует теперь считать состоящей из двух векторов  $G = \{g, h\}$ , начальная точка  $x_0$  должна принадлежать  $X_2^0$ .

В некоторых частных случаях (3) переходит в методы, предложенные в (1, 2). В частности (см. (1)), когда  $X = \{x: \sum_{i=1}^n x^i = 1, x \geq 0\}$ , система (3) имеет вид

$$\dot{x}^i = x^i \left[ \sum_{j=1}^n x^j F_{x^j} - F_x \right], \quad i=1, 2, \dots, n;$$

если  $X = \{x: a \leq x \leq b\}$ , то

$$\dot{x}^i = (x^i - a^i) (b^i - x^i) F_{x^i}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

4. Приведем дискретный вариант метода:

$$x_{s+1} = x_s - \alpha B(x_s) F_x(x_s), \quad B(x) = D(x) - D(x) G_x A^{-1}(x) G_x' D(x), \quad (5)$$

где  $0 < \alpha$ . Симметрическая матрица  $B(x)$  неотрицательно определенная для всех  $x \in X$ , поэтому  $\max_{x \in X_1, z \in \mathbb{R}_n} z' B(x) z / z' z = \lambda > 0$ . Считаем, что градиент  $F(x)$  удовлетворяет условию Липшица для всех  $x_1, x_2$  из  $X_1$ :

$$\|F_x(x_1) - F_x(x_2)\| \leq M \|x_1 - x_2\|. \quad (6)$$

Обозначим  $c = \max_{x \in X_1} \|w(x)\|$ ,  $a = \max_{x \in X_1} \|F_x + G_x w\|$ . Если множество  $X_1$  не ограничено, то максимум берется на множестве  $Z_1$ .

**Теорема 2.** Если выполнены условия теоремы 1 и условие (6), тогда при  $0 < \alpha < \min [1/a, 1/c, 2\lambda]$  и любых  $x_0 \in X_1^0$ , метод (5) сходится к единственному решению задачи (1), причем  $x_s \in X_1$ ,  $F(x_{s+1}) \leq F(x_s)$  для  $s=0, 1, 2, \dots$ .

Возможны варианты метода, аналогичные методу наискорейшего спуска, когда  $\alpha(s)$  выбирается на каждом шаге из условия минимизации  $F(x_{s+1})$  при условии  $x_{s+1} \in X_1^0$ . Для решения задачи (2) метод (5) можно применить лишь в том случае, если функции  $g(x)$  линейные.

5. Учет ограничений типа неравенства можно проводить, используя модификацию метода штрафных функций (3). Составим функцию

$$H(x, w, t) = F(x) + w' g(x) + f(t) \sum_{i=1}^k \varphi(h^i(x));$$

здесь  $w \in E_s$ ,  $f(t)$  — положительная, дифференцируемая, строго монотонно убывающая функция  $t$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ . Функция  $\varphi(z) \in E_1$  выпуклая, возрастающая, дифференцируемая, положительная при  $z < 0$ ,  $\lim_{z \rightarrow -0} \varphi(z) = \infty$ . В качестве этих функций можно взять, например, следующие:

$$f(t) = e^{-t}, \quad f = (1+t)^{-1}, \quad \varphi(z) = -z^{-1}, \quad \varphi(z) = -z^{-2}.$$

Для решения задачи (2) воспользуемся системой

$$\dot{x} = -D(x)H_x, \quad H_x = F_x + g_x w + f(t) \sum_{i=1}^k \varphi'(h^i) h_x^i. \quad (7)$$

Вектор  $w(t)$  выбираем таким образом, чтобы вектор-функция  $g(x)$  была интегралом системы (7)

$$\dot{g} = -g_x' D(x) H_x = 0. \quad (8)$$

Считаем, что векторное соотношение  $g(x) = 0$  определяет  $(n-s)$ -мерное гладкое многообразие в  $X_1$ ; векторы  $g_x^i$ ,  $h_x^i$  такие, что  $h^i = 0$ , и  $e^i$  такие, что  $x^i = 0$ , линейно независимые для всех  $x \in X_2$ . В этом случае система (8) однозначно разрешима относительно  $w$ . Дифференцируя  $H$  в силу (7), имеем

$$\dot{H} = -\|D(x^{1/2})H_x\|^2 + f \sum_{i=1}^k \varphi(h^i(x)) < 0.$$

Если  $h(x(t)) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow t_0 < \infty$ , то  $H \rightarrow \infty$ , что невозможно в силу полученного неравенства, поэтому траектории (7) продолжимы при  $t \rightarrow \infty$  и множество  $X_2^0$  инвариантно относительно (7).

Если множество  $X_2$  выпуклое (в этом случае функции  $g(x)$  линейные), выполнены усиленные условия регулярности, тогда справедлива теорема, аналогичная теореме 1:

**Теорема 3.** Пусть функции  $F$ ,  $h$  и множество  $X_2$  строго выпуклые; тогда решения (3), (7) при  $t \rightarrow \infty$  сходятся к единственному решению задачи (2) при любых  $x_0 \in X_2^0$ .

Если функции  $g(x)$  не линейные, то методы (3) и (7) сходятся к точкам, в которых выполнены необходимые условия Куна — Таккера в задаче (2).

В тех случаях, когда отсутствует ограничение  $x \geq 0$ , в методах (3) и (7) следует вместо матрицы  $D(x)$  писать единичную матрицу. Если существует ограничение  $x \geq a$ , то вместо  $D(x)$  следует взять  $D(x-a)$ .

Вычислительный центр  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
14 VI 1973

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Ю. Г. Евтушенко, В. Г. Жадан, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 13, № 3 (1973). <sup>2</sup> И. И. Дикин, Управляемые системы, Новосибирск. в. 9, 1971, стр. 59. <sup>3</sup> А. Фиацко, Г. Мак-Кормик, Нелинейное программирование, М., 1972.