

УДК 518:517.944/948

МАТЕМАТИКА

С. А. КАНТОР

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком Н. Н. Яненко 9 X 1973)

Пусть B — банахово пространство. Рассмотрим в нем двухслойную разностную схему

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} = A_1(\tau, h; n)u^{n+1} + A_0(\tau, h; n)u^n + F^n, \quad 0 \leq n\tau \leq T; \quad (1)$$

$A_0(\tau, h; n)$, $A_1(\tau, h; n)$ — линейные операторы в B ; $h = (h_1, \dots, h_m)$, τ — параметры разностной схемы, которые могут изменяться в некотором множестве $\Omega \subset R^{m+1}$ таким, что замыкание Ω содержит ноль и из принадлежности (τ, h) множеству Ω следует, что $\tau > 0$, $h_i > 0$. Последовательность элементов $u^0, u^1, \dots, u^n, \dots$ из пространства B , удовлетворяющая уравнению (1), называется его решением.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что для каждого $n=0, 1, \dots$ и любых $(\tau, h) \in \Omega$ существуют операторы $(I - \tau A_1(\tau, h; n))^{-1}$ (I — тождественный оператор), обратные к операторам $I - \tau A_1(\tau, h; n)$, причем равномерно по $(\tau, h) \in \Omega$, $n\tau \in [0, T]$ справедлива оценка

$$\|(I - \tau A_1(\tau, h; n))^{-1}\| \leq N.$$

Пусть $C(\tau, h; n) = (I - \tau A_1(\tau, h; n))^{-1}(I + \tau A_0(\tau, h; n))$. Обозначим через $S(\tau, h; n+p, n)$ оператор перехода ⁽¹⁾ со слоя с номером n к слою с номером $n+p$, $p \geq 0$:

$$S(\tau, h; n, n) = I,$$

$$S(\tau, h; n+p, n) = C(\tau, h; n+p-1)C(\tau, h; n+p-2) \dots C(\tau, h; n), \quad p > 0.$$

Определение 1 (см. ⁽²⁾). Будем говорить, что разностная схема (1) Ω -устойчива в B , если

$$\|S(\tau, h; n+p, n)\| \leq M,$$

причем M не зависит от $n\tau$, $(n+p)\tau \in [0, T]$, $(\tau, h) \in \Omega$.

Пусть $\mathcal{U} = \{u(t)\}$ — класс функций, отображающих отрезок $[0, T]$ в B , непрерывных по t и непрерывно дифференцируемых по t .

Определение 2 (см. ⁽²⁾). Разностная схема (1) обладает свойством Ω -аппроксимации на классе функций $\mathcal{U}$, если сильный предел в B

$$\lim_{(\tau, h) \rightarrow 0} \left[\frac{u((n+1)\tau) - u(n\tau)}{\tau} - A_1(\tau, h; n)u((n+1)\tau) - A_0(\tau, h; n)u(n\tau) \right] = f_u(t) \quad (2)$$

существует равномерно по t при $t \in [0, T]$, $n = [t/\tau]$, $u(t) \in \mathcal{U}$.

Определение 3. Разностная схема (1) обладает свойством слабой Ω -аппроксимации на классе функций $\mathcal{U}$, если для любой функции $u(t) \in \mathcal{U}$ существует кусочно-непрерывная функция $f_u(t)$ такая, что равномерно по t , $t_i \in [0, T]$ ($n = [t/\tau]$, $n+p = [t_i/\tau]$, $t_i > t$)

$$\lim_{(\tau, h) \xrightarrow{\Omega} 0} \tau \sum_{i=n}^{n+p} \left[\frac{u((i+1)\tau) - u(i\tau)}{\tau} - A_1(\tau, h; i) u((i+1)\tau) - A_0(\tau, h; i) u(i\tau) \right] = \\ = \int_0^1 f_u(\theta) d\theta. \quad (3)$$

Ясно, что если разностная схема (1) обладает свойством Ω -аппроксимации на классе функций $\mathbb{U}$ и функция $f_u(t)$, полученная из (2), кусочно-непрерывна по t , то схема обладает свойством слабой Ω -аппроксимации на $\mathbb{U}$.

В качестве примера рассмотрим разностную схему

$$(y^{n+1} - y^n)/\tau - \alpha y^n - y^n \cos n\tau^\beta = 0, \quad \beta > 0.$$

При $\beta > 1$ она обладает свойством Ω -аппроксимации на функциях из $C_1([0, T])$, $f_v(t) = y'(t) - (\alpha + 1)y(t)$. Очевидно, что при $\beta < 1$ схема обладает свойством Ω -аппроксимации только на функции $y(t) = 0$. Однако она обладает свойством слабой Ω -аппроксимации на функциях из $C_1([0, T])$ и $f_v(t) = y'(t) - \alpha y(t)$.

Наложим некоторое условие $\mathfrak{A}$ на разностную схему (1) и класс функций $\mathbb{U}$: Пусть $u(t) \in \mathbb{U}$, $f(t)$ — кусочно-непрерывная по t функция и

$$\tau \sum_{i=n}^{n+p} (F^i - f(i\tau)) \xrightarrow[(\tau, h) \xrightarrow{\Omega} 0]{} 0$$

равномерно по t , $t_i \in [0, T]$ ($n = [t/\tau]$, $n+p = [t_i/\tau]$). Обозначим

$$\alpha_i = \frac{u((i+1)\tau) - u(i\tau)}{\tau} - A_1(\tau, h; i) u((i+1)\tau) - A_0(\tau, h; i) u(i\tau) - F^i.$$

Потребуем, чтобы существовала такая константа M_1 , не зависящая от $i\tau \in [0, T]$, $(\tau, h) \in \Omega$, что

$$\|\alpha_i\| + \|A_0(\tau, h; i)\alpha_i\| \leq M_1, \quad (4)$$

и равномерно по $n\tau, k\tau, i\tau \in [0, T]$, $(\tau, h) \in \Omega$

$$\| [S(\tau, h; n, k+r) - S(\tau, h; n, k)] \alpha_i \| \leq \gamma(r\tau), \quad (5)$$

где r — целое число, $0 \leq k+r \leq n$, $\gamma(r\tau) \rightarrow 0$ при $r\tau \rightarrow 0$.

З а м е ч а н и е. Если разностная схема (1) явная ($A_1(r, h; n) = 0$), то неравенство (4) можно заменить неравенством $\|\alpha_i\| \leq M_1$.

Л е м м а. Если разностная схема (1) Ω -устойчива в B и для некоторого элемента $v \in B$ существует такая константа M_2 , что нормы $\|v\|$, $\|A_1(\tau, h; n)v\|$, $\|A_0(\tau, h; n)v\|$ меньше, чем M_2 , причем M_2 не зависит от $(\tau, h) \in \Omega$, $n\tau \in [0, T]$, то

$$\| [S(\tau, h; n, k+r) - S(\tau, h; n, k)] v \| \leq 2\tau |r| N M M_2.$$

Из леммы следует, что если $v = \alpha_i$ и M_2 не зависит от i , то выполняется условие (5).

Т е о р е м а 1. Пусть разностная схема (1) Ω -устойчива в B , обладает свойством слабой Ω -аппроксимации на классе функций $\mathbb{U}$ и функция $f_u(t)$ получена с помощью равенства (3) по некоторой функции $u(t) \in \mathbb{U}$.

Тогда, если выполнено условие $\mathfrak{A}$ с $f(t) = f_u(t)$, $\lim_{(\tau, h) \xrightarrow{\Omega} 0} u^0 = u(0)$, то реше-

ние $\{u^n\}$ разностной схемы (1) сходится к $u(t)$ равномерно по t при $(\tau, h) \xrightarrow{\Omega} 0$.

Аналогичная теорема для схем, обладающих свойством Ω -аппроксимации, сформулирована в (2).

Теорема 2. Пусть разностная схема (1) Ω -устойчива в B , $u(t)$ и $f(t)$ — некоторые функции такие, что выполнено условие $\mathfrak{A}$, $\{u^n\}$ — решение разностной схемы (1).

Тогда из равномерной по t сходимости $\{u^n\}$ к $u(t)$ следует, что схема обладает свойством слабой Ω -аппроксимации на $u(t)$ и $f_u(t)=f(t)$.

Будем говорить, что пара операторов $A_0(\tau, h; n)$, $A_1(\tau, h; n)$ равностепенно непрерывна по t на классе функций $\mathfrak{U}$ при $(\tau, h) \in \Omega$, если для любой функции $u(t) \in \mathfrak{U}$

$$\|A_1(\tau, h; n+n_0)u((n+n_0+1)\tau) - A_1(\tau, h; n)u((n+1)\tau) + A_0(\tau, h; n+n_0)u((n+n_0)\tau) - A_0(\tau, h; n)u(n\tau)\| \leq \delta(\tau n_0),$$

где $\delta(\tau n_0)$ не зависит от $(\tau, h) \in \Omega$, $n\tau \in [0, T]$; $\delta(\tau n_0) \rightarrow 0$ при $\tau n_0 \rightarrow 0$.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 2, пара операторов $A_0(\tau, h; n)$, $A_1(\tau, h; n)$ равностепенно непрерывна по t на $\mathfrak{U}$, $f(t)$ непрерывна по t .

Тогда из равномерной по t сходимости разностного решения $\{u^n\}$ к функции $u(t)$ следует, что схема обладает свойством Ω -аппроксимации на $u(t)$.

Пусть $A(t)$ — оператор с областью определения $D(A(t))$ и со значениями в B . Предположим, что для любого $t_0 \in [0, T]$ область определения $D(A(t_0))$ оператора $A(t_0)$ содержит множество $\mathfrak{U}_{t_0} = \{u(t) |_{t=t_0}, u(t) \in \mathfrak{U}\}$.

Определение 4. Разностная схема (1) (слабо) Ω -аппроксимирует уравнение $du/dt = A(t)u + f$ на классе функций $\mathfrak{U}$, если для каждой функции $u(t) \in \mathfrak{U}$ равномерно по t ($n = [t/\tau]$)

$$A(t)u(t) = \lim_{\substack{(\tau, h) \rightarrow 0 \\ \Omega}} [A_1(\tau, h; n)u((n+1)\tau) + A_0(\tau, h; n)u(n\tau)],$$

$$f(t) = \lim_{\substack{(\tau, h) \rightarrow 0 \\ \Omega}} F^n. \quad (6)$$

В случае слабой Ω -аппроксимации пределы (6) заменяются на пределы

$$A(t)u(t) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} \left\{ \lim_{\substack{(\tau, h) \rightarrow 0 \\ \Omega}} \tau \sum_{i=n}^{[(t+\eta)/\tau]} [A_1(\tau, h; i)u((i+1)\tau) + A_0(\tau, h; i)u(i\tau)] \right\},$$

$$f(t) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} \left\{ \lim_{\substack{(\tau, h) \rightarrow 0 \\ \Omega}} \tau \sum_{i=n}^{[(t+\eta)/\tau]} F^i \right\}.$$

Замечание. Если разностная схема (1) двухслойная составная с периодом m (см. (3)), то понятие слабой Ω -аппроксимации уравнения близко к понятию суммарной аппроксимации, которое рассматривалось ранее в работах А. А. Самарского и И. В. Фрязинова (подробную библиографию см. в (3)).

Рассмотрим в качестве класса $\mathfrak{U}$ множество гладких решений уравнения

$$du/dt = A(t)u. \quad (7)$$

Теорема 3. Для того чтобы решение однородной ($F^n \equiv 0$) Ω -устойчивой разностной схемы (1) сходилось равномерно по t к гладкому решению $u(t)$ уравнения (7) (т. е. решению, удовлетворяющему условию $\mathfrak{A}$) при $u^0 \rightarrow u(0)$, необходимо и достаточно, чтобы разностная схема (1) слабо Ω -аппроксимировала уравнение (7) на этом решении.

Из теоремы 3 и следствия к теореме 2 имеем

Следствие. Если Ω -устойчивая однородная разностная схема (1) удовлетворяет условию $\mathfrak{A}$ на решении $u(t)$ уравнения (7), пара операторов $A_0(\tau, h; n)$, $A_1(\tau, h; n)$ равностепенно непрерывна по t на этом решении,

то для равномерной по t сходимости решения разностной схемы $\{u^n\}$ к решению уравнения $u(t)$, необходимо и достаточно, чтобы разностная схема (1) Ω -аппроксимировала уравнение (7) на этом решении и $u^0 \rightarrow u(0)$.

Это утверждение можно рассматривать как двойственное к теореме эквивалентности Лакса (⁴), так как теорема Лакса гласит, что при условии аппроксимации устойчивость является необходимым и достаточным условием сходимости.

Автор благодарит акад. Н. Н. Яненко и Г. В. Демидова за постоянное внимание и помощь в работе.

Алтайский политехнический институт
им. И. И. Ползунова
Барнаул

Поступило
9 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Н. Яненко, Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, «Наука», 1967. ² Н. Н. Яненко, Г. В. Демидов, ДАН, т. 204, № 5 (1972).
³ А. А. Самарский, Введение в теорию разностных схем, М., 1971. ⁴ Р. Рунтмайер, К. Мортон, Разностные методы решения краевых задач, «Мир», 1972.