

УДК 518.5

МАТЕМАТИКА

А. В. КАРЗАНОВ

НАХОЖДЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА В СЕТИ МЕТОДОМ ПРЕДПОТОКОВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 16 IV 1973)

Излагается алгоритм нахождения максимального потока в сети с верхней оценкой числа действий $O(n^3)$, n — число вершин сети.

1. Поточковой сетью называется ориентированный граф $G=[V; U]$ с множеством вершин V , $|V|=n$, множеством дуг U , $|U|=p$, действительной функцией «пропускной способности» дуги $c(u)>0$, $u \in U$, «источником» $s \in V$, «стоком» $t \in V$. Функция $f(u)$, $u \in U$ называется потоком, если:

$$1) 0 \leq f(u) \leq c(u) \quad \forall u \in U,$$

$$2) \operatorname{Div}(x) = \sum_{(x,y) \in U} f((x,y)) - \sum_{(z,x) \in U} f((z,x)) = 0 \quad \forall x \in V \setminus \{s, t\}.$$

Максимальным называется поток с наибольшей мощностью $v(f) = \operatorname{Div}(s) = -\operatorname{Div}(t)$ (1).

В (2) задача фактически сводится к решению не более чем $n-1$ задач следующего вида:

Дана сеть (справочная кратчайших путей) $S_k=[V_k; U_k]$, $|V_k| \leq n$, $|U_k| \leq p$, $1 \leq k \leq n-1$, с «источником» s , «стоком» t , «пропускной способностью» дуги $c_k(u)$, $u \in U_k$, такая, что любая вершина, а также любая дуга принадлежат некоторому кратчайшему (ориентированному) пути из s в t (с числом дуг k). Найти такой поток f_k , что для любого (ориентированного) пути ξ из s в t найдется насыщенная дуга $u \in \xi$, т. е. $f_k(u) = c_k(u)$. f_k называется тупиковым потоком.

Предлагается алгоритм, решающий эту задачу за $O(n^2)$ действий.

2. В справочной $S=[V; U]$ (индекс k в дальнейшем будем опускать) l -ым слоем, $l=0, 1, \dots, k$, называется множество $O_l=\{x: x \in V, x \text{ находится на расстоянии } l \text{ от } s\}$. Согласно определению $O_0=\{s\}$, $O_k=\{t\}$.

Пусть $\rho(u)$, $u \in U$, — допустимая функция, т. е. $0 \leq \rho(u) \leq c(u)$. Пусть ξ называется ρ -заблокированным, если найдется насыщенная дуга $u \in \xi$, т. е. $\rho(u) = c(u)$. Дуга $u=(x, y)$ (соответственно, вершина x') называется ρ -заблокированной, если любой путь ξ вида $x, u, y, \dots, t$ (соответственно путь ξ' вида $x', \dots, t$) является ρ -заблокированным. Таким образом, тупиковый поток — это такой поток f , для которого источник s f -заблокирован.

Будем пользоваться следующими обозначениями: $\alpha(x)$, $x \in V$, — множество дуг, исходящих из x , $\beta(x)$ -входящих в x ;

$$\bar{V} \doteq V \setminus \{s, t\}; \quad \rho(U') \doteq \rho(u)|_{U'}, \quad |\rho(U'(x))| \doteq \sum_{u \in U} \rho(u), \quad U' \subseteq U$$

(знак $\doteq$ означает равенство по определению).

Функцию $g(u)$, $u \in U$, назовем предпотоком, если выполняются следующие свойства:

$$P1. \quad 0 \leq g(u) \leq c(u);$$

$$P2. \quad |g(\beta(x))| \geq |g(\alpha(x))| \quad \forall x \in \bar{V};$$

P3. Если $|g(\beta(x))| > |g(\alpha(x))|$, $x \in \bar{V}$ (x называется дефицитной вершиной), то вершина x g -заблокирована;

P4. Вершина s g -заблокирована.

Если предпоток g не содержит дефицитных вершин, то g — тупиковый поток.

3. Описание алгоритма. Тупиковый поток в S строится итеративно. i -я итерация, $i=1, 2, \dots$, состоит из двух частей: а) достройки до предпотока, б) балансирования дефицитных вершин. Функцию, полученную на i -й итерации в результате достройки, будем обозначать g_i , в результате балансирования — $g_i^{\text{испр}}$.

Каждая дуга имеет текущую пометку: открытая, либо закрытая. Если дуга становится закрытой, то она остается такой до конца работы алгоритма. Вначале все дуги открыты.

Будем считать, что множество $M = \{m_1, m_2, \dots, m_q\}$ задано в виде списка, если фиксировано некоторое упорядочение $m_{p_1}, m_{p_2}, \dots, m_{p_q}$ посредством указания начального элемента ($m_{\text{нач}} = m_{p_1}$); конечного ($m_{\text{кон}} = m_{p_q}$) и для каждого элемента m_{p_j} , $j=1, 2, \dots, q$, — предыдущего ($m_{p_{j-1}}$) и последующего ($m_{p_{j+1}}$) (полагаем $m_{p_0} = \phi$, $m_{p_{q+1}} = \phi$).

В виде списков задаются следующие текущие множества:

а) $\bar{\alpha}(x) \quad \forall x \in V$ — множество открытых ненасыщенных дуг;

б) $\beta_\Delta(x) \quad \forall x \in \bar{V}$ — множество, смысл которого уточняется далее. Для каждого $z \in \beta_\Delta(x)$ определено действительное число $\Delta(z) > 0$, называемое добавкой. Вначале $\bar{\alpha}(x) = \alpha(x) \quad \forall x \in V$; $\beta_\Delta(x) = \phi \quad \forall x \in \bar{V}$.

Достройка до предпотока. Пусть уже произведено $i-1$ итераций, $i \geq 2$, определена функция $g_{i-1}^{\text{испр}}$ и справедливы утверждения (при $r=i-1$):

1°. Для $g_r^{\text{испр}}$ выполняются свойства **P1**, **P2**, **P4** и определен слой $O_{s(r)}$

такой, что для $\forall x \in \bigcup_{l=1}^{s(r)-1} O_l$ выполняется **P3** и в слоях $O_{s(r)+1}, O_{s(r)+2}, \dots, O_{k-1}$ нет дефицитных вершин.

2°. Все закрытые дуги $g_r^{\text{испр}}$ заблокированы.

3°. Для каждой дуги $u \in \bar{\alpha}(x) \quad \forall x \in V$, кроме, быть может, начальной, $g_r^{\text{испр}}(u) = 0$.

Достройка на i -й итерации заключается в построении предпотока g_i из $g_{i-1}^{\text{испр}}$. Скажем, что в дуге $u \in U$ произведено активное назначение, если $g_i(u) > g_{i-1}^{\text{испр}}(u)$. Будем говорить, что во всех остальных дугах производится пассивное назначение; для каждой такой дуги u $g_i(u) = g_{i-1}^{\text{испр}}(u)$.

Для всех дуг, инцидентных вершинам слоев $O_0, O_1, \dots, O_{s(i-1)-1}$, полагаем $g_i = g_{i-1}^{\text{испр}}$ (пассивное назначение).

Производится послойный обход вершин слоев $O_{s(i-1)}, O_{s(i-1)+1}, \dots, O_{k-1}$: сначала перебираются вершины слоя $O_{s(i-1)}$, затем $O_{s(i-1)+1}$ и т. д. до O_{k-1} включительно. Пусть при послойном обходе уже обойдены вершины $x_1, x_2, \dots, x_N$ и $x_{N+1} \in O_j$ — следующая вершина. $g_i(\beta(x))$ уже определено для любой вершины $x \in O_j$ и

$$|g_i(\beta(x_{N+1}))| \geq |g_{i-1}^{\text{испр}}(\alpha(x_{N+1}))|.$$

а) Если $|g_i(\beta(x_{N+1}))| = |g_{i-1}^{\text{испр}}(\alpha(x_{N+1}))|$, то полагаем $g_i(\alpha(x_{N+1})) = g_{i-1}^{\text{испр}}(\alpha(x_{N+1}))$ (пассивное назначение).

б) Если $|g_i(\beta(x_{N+1}))| > |g_{i-1}^{\text{испр}}(\alpha(x_{N+1}))|$ и $\bar{\alpha}(x_{N+1}) = \phi$, то полагаем $g_i(\alpha(x_{N+1})) = g_{i-1}^{\text{испр}}(\alpha(x_{N+1}))$ (пассивное назначение).

в) Пусть $|g_i(\beta(x_{N+1}))| > |g_{i-1}^{\text{испр}}(\alpha(x_{N+1}))|$ и $\bar{\alpha}(x_{N+1}) \neq \phi$. Пусть $\bar{\alpha}(x) = \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$.

Полагаем $g_i(\alpha(x_{N+1}) \setminus \bar{\alpha}(x_{N+1})) = g_{i-1}^{\text{испр}}(\alpha(x_{N+1}) \setminus \bar{\alpha}(x_{N+1}))$ (пассивное назначение). Пусть для дуг $u_0 = \phi, u_1, u_2, \dots, u_l, 0 \leq l < q$, g_i уже определено и $|g_i(\alpha(x_{N+1}))| < |g_i(\beta(x_{N+1}))|$, где $\alpha(x_{N+1}) = \alpha(x_{N+1}) \setminus \bar{\alpha}(x_{N+1}) \cup \{u_0, u_1, \dots, u_l\}$ — множество дуг с уже заданным g_i . Для очередной дуги u_{l+1} списка $\bar{\alpha}(x_{N+1})$ полагаем $g_i(u_{l+1}) = \min \{c(u_{l+1}), |g_i(\beta(x_{N+1}))| - |g_i(\alpha(x_{N+1}))|\}$ (активное назначение). Производим активные назначения до дуги u_m (включительно), для которой либо: 1) $|g_i(\alpha(x_{N+1}) \setminus \bar{\alpha}(x_{N+1}) \cup \{u_1, u_2, \dots, u_m\})| = |g_i(\beta(x_{N+1}))|$, либо 2) $m = q$. Для дуг $u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_q$ (в случае 1) полагаем $g_i = g_{i-1}^{\text{испр}} = 0$ (пассивное назначение). Новый список $\bar{\alpha}(x_{N+1})$ имеет вид $\{u_m, u_{m+1}, \dots, u_q\}$, если $g_i(u_m) < c(u_m)$, и имеет вид $\{u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_q\}$, если $m < q$ и $g_i(u_m) = c(u_m)$.

Если в дуге $u = (x_{N+1}, y)$ производится активное назначение, то u добавляется в конец списка $\beta_\Delta(y)$ (даже если дуга u уже содержится в $\beta_\Delta(y)$) и $\Delta(u)$ определяем равной $g_i(u) - g_{i-1}^{\text{испр}}(u)$.

При построении g_i полагаем $g_0^{\text{испр}} = 0, s(0) = 0, g_i(\alpha(s)) = c(\alpha(s))$ (активное назначение) и далее действуем в соответствии с алгоритмом достройки.

Балансирование. Пусть $d(i)$ — максимальный номер слоя, в котором у g_i есть дефицитная вершина (x). В вершине x проводится операция балансирования, т. е. определение $g_i^{\text{испр}}(\beta(x))$ такого, что $|g_i^{\text{испр}}(\beta(x))| = |g_i(\alpha(x))|$ и $g_i^{\text{испр}}(u) \leq g_i(u) \quad \forall u \in \beta(x)$. Балансирование в вершине x производим в соответствии со списком $\beta_\Delta(x)$, идя с его конца и уменьшая g_i за счет «добавок». Пусть u_i — очередной элемент в $\beta_\Delta(x)$ и $|g_i^{\text{испр}}(\hat{\beta}(x))| + |g_i(\beta(x) \setminus \hat{\beta}(x))| > |g_i(\alpha(x))|$, где $\hat{\beta}(x) \subset \beta(x)$ — множество дуг, для которых $g_i^{\text{испр}}$ определено. Полагаем $g_i^{\text{испр}}(u_i) = \max \{g_i(u_i) - \Delta(u_i), |g_i(\alpha(x))| - |g_i^{\text{испр}}(\hat{\beta}(x))| - |g_i(\beta(x) \setminus \hat{\beta}(x) \setminus u_i)|\}$ (активное назначение) и переходим к u_{i-1} и так до тех пор, пока не станет $|g_i^{\text{испр}}(\beta(x))| + |g_i(\beta(x) \setminus \hat{\beta}(x))| = |g_i(\alpha(x))|$, где $\hat{\beta}(x)$ — (новое) множество с уже определенным $g_i^{\text{испр}}$. Для $\forall u \in \beta(x) \setminus \hat{\beta}(x)$ полагаем $g_i^{\text{испр}}(u) = g_i(u)$ (пассивное назначение). Каждая дуга $u = (y, x) \in \beta(x)$ объявляется «закрытой» и вычеркивается из списка $\bar{\alpha}(y)$ (если в нем присутствовала).

Если в слое $O_{d(i)}$ несколько дефицитных вершин, то производим балансирование независимо для каждой. Для всех дуг с еще не назначенным $g_i^{\text{испр}}$ полагаем $g_i^{\text{испр}} = g_i$ (пассивное назначение). Положим $s(i) = d(i) - 1$.

Лемма 1. 1) g_i — предпоток, 2) утверждения 1°—3° верны при $r = i$.
3) Если вершина $x \in V$ $g_{i-1}^{\text{испр}}$ -заблокирована, то она g_i -заблокирована и $g_i^{\text{испр}}$ -заблокирована.

Лемма доказывается индукцией по i (при $i = 1$ доказательство непосредственное).

Каждой «добавке» Δ отнесем номер $e(\Delta)$ той итерации, на которой она возникла в результате достройки. Пусть k_i — максимальный номер добавок по всем дугам, входящим в вершины слоя O_i , перед началом балансирования на i -й итерации.

Лемма 2. При балансировании на i -й итерации активное назначение может производиться только для такой дуги $u \in \beta_\Delta(x)$, $x \in O_{d(i)}$, у которой $e(\Delta(u)) = k_{i, d(i)} \cdot g_i^{\text{испр}}(u) \geq g_i(u) - \Delta(u)$.

При помощи лемм 1, 2 доказывается

Теорема. В каждой вершине $x \in V$ балансирование проводится не более одного раза.

Из теоремы следует, что число итераций не более $n - 2$. Окончательная функция является потоком и поскольку s g_i -заблокирована, то из леммы 1 п. 3 следует, что этот поток тупиковый.

4. Оценка числа действий. При пассивном назначении действия не производятся. Благодаря использованию списков, число действий

на построение тупикового потока $\eta = O(n^2 + \bar{\eta})$, где η — число активных назначений. Из теоремы следует, что $\bar{\eta} = O(p + \eta_d)$, где η_d — число активных назначений при достройках. Скажем, что в результате активного назначения при достройке в дуге u произошло событие A , если дуга u насытилась, и событие B , если не насытилась.

Л е м м а 3. 1) *Общее число событий A не выше p .*

2) *В течение одной итерации в $\alpha(x)$ $\forall x \in V$ происходит не более одного события B .*

Из леммы 3 следует, что $\eta_d \leq p + \eta'$ и $\eta' = O(n^2)$, где η' — общее число событий B , откуда следует, что $\eta = O(n^2 + \eta') = O(n^2)$.

Имеется модификация изложенного метода нахождения тупикового потока, для которой $\eta = O(p + \eta')$. Удастся построить экстремальные примеры сетей, подтверждающие точность оценки $O(n^3)$ для нахождения максимального потока с помощью изложенного и модифицированного методов.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
16 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. Форд, Д. Фалкерсон, Потоки в сетях, М., 1966. ² Е. А. Диниц, ДАН, т. 194, № 4 (1970).