Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 1

УДК 517.948.32

МАТЕМАТИКА

В. Г. КРАВЧЕНКО, А. М. НИКОЛАЙЧУК

О ЧАСТНЫХ ИНДЕКСАХ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ ДВУХ ПАР ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 16 VI 1973)

1. В пространстве $L_p(\Gamma)$, $p>1$, где контур Γ состоит из $(m+1)$ замкнутых непересекающихся кривых Ляпунова, рассматривается задача Римана для кусочно-аналитического вектора

$$\Phi^+(t)=A(t)\Phi^-(t), \tag{1}$$

где

$$A(t)=\begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

— невырожденная всюду на Γ матрица второго порядка с непрерывными коэффициентами. В связи с тем, что в общем случае не имеется эффективного алгоритма решения задачи Римана и вычисления ее частных индексов, возникает задача об оценке частных индексов. Такая задача решена в случае треугольной матрицы $A(t)$ ([3]). В настоящей заметке дается оценка частных индексов задачи (1) через число нулей некоторого эффективно построенного оператора Фредгольма в предположении, что хотя бы один элемент матрицы $A(t)$ отличен от нуля всюду на контуре Γ. Эти оценки позволяют дать некоторые достаточные признаки устойчивости частных индексов и устойчивости числа решений задачи (1). Устанавливается также признак принадлежности матриц 2-го порядка к определенному классу эквивалентности ([7]). Кроме того, удается показать, что частные индексы задачи (1) с эрмитовой матрицей $U(t)$, где $\det U(t)>0$, равны нулю.

2. Пусть $a(t)\neq 0$. Обозначим $k=\operatorname{Ind} a(t)$, $\varkappa=\operatorname{Ind}\Delta(t)$, где $\Delta(t)=\det A(t)$. Тогда по решению задачи (1) можно эффективно построить решение задачи

$$\Phi^+(t)=B(t)\Phi^-(t), \tag{2}$$

где

$$B(t)=\begin{pmatrix} a(t)t^{\varkappa-k} & b(t)t^{k} \\ c(t)t^{\varkappa-k} & d(t)t^{k} \end{pmatrix}.$$

Используя ([4]), получаем оценки для частных индексов $\varkappa_i'$ задачи (1):

$$\min(\varkappa_1+k-\varkappa,\ \varkappa_1-k)\leqslant\varkappa_i'\leqslant\max(\varkappa_2+k-\varkappa,\ \varkappa_2-k),\quad i=1,2, \tag{3}$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, $\varkappa_1\leqslant\varkappa_2$, — частные индексы задачи (2).

3. Задачу (2) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма. Имеем

$$B(t)=\begin{pmatrix} a^+(t) & 0 \\ 0 & \Delta^+(t)/a^+(t) \end{pmatrix} C(t) \begin{pmatrix} t^{\varkappa}/a^-(t) & 0 \\ 0 & t^{\varkappa}a^-(t)/\Delta^-(t) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где

$$C(t)=\begin{pmatrix} 1 & b(t)t^{k-\varkappa}\dfrac{\Delta^-(t)}{a^+(t)a^-(t)} \\ c(t)t^{-k}\dfrac{a^+(t)a^-(t)}{\Delta^+(t)} & \dfrac{a(t)d(t)}{\Delta_B(t)} \end{pmatrix},$$

$$a(t)=t^{\varkappa}\frac{a^+(t)}{a^-(t)},\quad \Delta_B(t)=t^{\varkappa}\cdot\Delta(t)=t^{2\varkappa}\frac{\Delta^+(t)}{\Delta^-(t)}.$$

Задача Римана с матрицей $C(t)$ эквивалентна уравнению ([5])

$$T\varphi\equiv(I+{}^1/{}_2U(t)D)\varphi=0, \tag{5}$$

где I — тождественный оператор, вполне непрерывный оператор D определяется равенством $D=Sv^+-v^+S$, S — оператор сингулярного интегрирования,

$$U(t)=c(t)t^{-k}\frac{a^+(t)a^-(t)}{\Delta^+(t)},\quad v^+(t)={}^1/{}_2(I+S)\left[b(t)t^{k-\varkappa}\frac{\Delta^-(t)}{a^+(t)a^-(t)}\right].$$

Из левой стандартной матрицы $C(t)$ ([3])

$$C(t)=\mathrm{X}^+(t)\begin{pmatrix}t^{l(T)} & \\ & t^{-l(T)}\end{pmatrix}\mathrm{X}^-(t),$$

$l(T)$ — число нулей оператора T, получаем левую факторизацию матрицы $B(t)$:

$$B(t)=\Psi^+(t)\begin{pmatrix}t^{\varkappa+l(T)} & \\ & t^{\varkappa-l(T)}\end{pmatrix}\Psi^-(t),$$

где

$$\Psi^+(t)=\begin{pmatrix}a^+(t) & 0\\ 0 & \Delta^+(t)/a^+(t)\end{pmatrix}\mathrm{X}^+(t),$$

$$\Psi^-(t)=\mathrm{X}^-(t)\begin{pmatrix}1/a^-(t) & 0\\ 0 & a^-(t)/\Delta^-(t)\end{pmatrix}.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 1. *Частные индексы задачи* (2) *вычисляются по формулам*

$$\varkappa_1=\varkappa+l(T),\quad \varkappa_2=\varkappa-l(T).$$

Следствие 1. *Система частных индексов задачи* (2) *устойчива* ([6]) *тогда и только тогда, когда* $l(T)=0$.

Заметим, что из устойчивости частных индексов задачи (2) вообще говоря не следует устойчивость частных индексов задачи (1). Однако при $\varkappa=2k$ получаем, что

$$\varkappa_1'=\varkappa_1+{}^1/{}_2\varkappa,\quad \varkappa_2'=\varkappa_2+{}^1/{}_2\varkappa,$$

и в случае $\varkappa_1=\varkappa_2=\varkappa$ частные индексы задачи (1) устойчивы.

Следствие 2. *Число решений задачи* (2) *устойчиво* ([7]) *тогда и только тогда, когда* $l(T)$ *удовлетворяет неравенству*

$$l(T)\leqslant|\varkappa|. \tag{6}$$

Исходя из следствия 1 и формул (3), получаем

Следствие 3. *Если* $l(T)=0$, $k\varkappa>0$ *и* $|\varkappa|\geqslant|k|$, *то число решений задачи* (1) *устойчиво.*

4. Пусть $P={}^1/{}_2(I+S)$ и $Q={}^1/{}_2(I-S)$. Тогда $PDP=QDQ=QDP=0$ и, следовательно, $D=2Pv^+Q$. Поэтому

$$T=I+PuPv+Q+QuPv+Q.$$

Оператор $M=I-PuPv+Q$ непрерывно обратим и

$$M^{-1}=I+PuPv+Q.$$

Отсюда $l(T)=l(T_1)$, где $T_1=TM=I+QuPv+Q$.

Обозначим $u^+(t)=(Pu)(t)$, $u^-(t)=(Qu)(t)$. Тогда $Qu^+Pv^+Q=0$, т. е.

$$T_1=I+Qu^-Pv^+Q. \tag{7}$$

Из непрерывной обратимости операторов $I-Qu^-P$ и $I+Pv+Q$ следует равенство $l(T_1)=l(T_2)$, где

$$T_2=(I-Qu^-P)T_1(I+Pv^+Q)=I+Pv^+Q-Qu^-P. \tag{8}$$

Так как

$$Pu^-Q=Qv^+P=0, \tag{9}$$

то оператор T_2 можно представить в виде

$$T_2=I+{}^1/_2(Sw-wS), \tag{10}$$

где $w(t)=v^+(t)-u^-(t)$.

Таким образом, исследование задачи Римана в указанном выше смысле сводится к исследованию одного из операторов вида (7), (8), (10). В свою очередь, от уравнения

$$T_3\varphi\equiv(I+PvQ-QuP)\varphi=0$$

легко перейти к задаче Римана с матрицей

$$G(t)=\begin{pmatrix}1 & v(t)\\ u(t) & 1+u(t)v(t)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & v^+(t)+v^-(t)\\ u^+(t)+u^-(t) & 1+(u^+(t)+u^-(t))(v^+(t)+v^-(t))\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Из (9) непосредственно следует, что частные индексы матрицы $G(t)$ равны частным индексам матрицы

$$\tilde{G}(t)=\begin{pmatrix}1 & v^+(t)\\ u^-(t) & 1+u^-(t)v^+(t)\end{pmatrix}$$

Теорема 2. *Матрицы вида* (11) *с произвольными* $v^-(t)$ *и* $u^+(t)$ *принадлежат одному классу эквивалентности* [7], *содержащему* $\tilde{G}(t)$.

Из теоремы 2, в частности, следует, что в общем случае оценка частных индексов векторной задачи Римана не может быть произведена только с помощью индексов элементов матрицы.

Наиболее простым является случай, когда $u^-(t)$, либо $v^+(t)$ — рациональные функции. Тогда оператор Qu^-Pv^+Q конечномерный [8], и уравнение $T_1\varphi=0$, а, следовательно, и задача Римана (1) решается в замкнутой форме. При этом $l(T)$ совпадает с рангом некоторой легко получаемой числовой матрицы.

Таким образом, здесь получено обобщение хорошо изученного случая рациональной матрицы, когда решение строится эффективно [1, 2, 9].

5. Рассмотрим задачу с эрмитовой матрицей

$$U(t)=\begin{pmatrix}\alpha(t) & \gamma(t)\\ \overline{\gamma(t)} & \beta(t)\end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $|t|=1$.

Пусть $\alpha(t)\neq0$ и пусть

$$\Delta t=\Delta^+(t)\cdot\Delta^-(t) \tag{13}$$

— факторизация определителя $\Delta(t)=\det U(t)$.

Имеем

$$\Delta(t)=\overline{\Delta^-(t)}\cdot\overline{\Delta^+(t)}. \tag{14}$$

Тогда имеет место факторизация [11]

$$\Delta(t)=c\Delta^+(t)\cdot\overline{\Delta^+(t)}, \tag{15}$$

где c — действительная постоянная. Не нарушая общности, можно считать, что $|c|=1$.

Из (15) следует, что $c=1$, если $\Delta(t)>0$, и $c=-1$, если $\Delta(t)<0$.

Теорема 3. *Если* $\Delta(t)>0$, *то частные индексы задачи Римана с эрмитовой матрицей* $U(t)$ *равны нулю.*

Действительно, в этом случае

$$T_3=i(-iI+D_1), \quad D_1=P\,dQ+Q\,\bar{d}P,$$

$$d(t)=\frac{-ic_1\gamma(t)\overline{\alpha^+(t)}}{\alpha^+(t)\overline{\Delta^+(t)}}, \quad \alpha(t)=c_1\alpha^+(t)\overline{\alpha^+(t)}, \quad |c_1|=1.$$

Легко проверить, что оператор D_1 самосопряженный, и поэтому $l(T_3)=0$. Из предыдущего следует, что частные индексы матрицы $U(t)$ также равны нулю.

Отметим, что в случае положительно определенной эрмитовой матрицы эта теорема другим способом была установлена Ю. Л. Шмульяном.

Замечание. Все результаты статьи имеют место в пространстве $H(\Gamma)$ при $A(t)\in H(\Gamma)$.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Г. С. Литвинчуку за руководство работой.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило
20 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», 1968. [2] *Ф. Д. Гахов*, УМН, т. 7, 4 (1959). [3] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*, УМН, т. 13, 2 (1958). [4] *А. М. Николайчук*, Укр. матем. журн., т. 23, № 6 (1971). [5] *В. Г. Кравченко, А. М. Николайчук*, Дифференциальные уравнения, т. 9, № 2, 382 (1973). [6] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*, ДАН, т. 119, № 5 (1958). [7] *Б. В. Боярский*, Исслед. по современным проблемам ТФКП, М., 1961. [8] *Е. М. Шпигель*, Матем. исследования, т. 7, № 1 (1972). [9] *Н. П. Векуа*, Системы сингулярных интегральных уравнений, «Наука», 1970. [10] *Ю. Л. Шмульян*, УМН, т. 8, 2 (1953). [11] *Ф. Д. Гахов*, Краевые задачи, М., 1963.