Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 1

УДК 517.11 *МАТЕМАТИКА*

Член-корреспондент АН СССР А. А. МАРКОВ

О ЯЗЫКЕ $Я_{\omega|}$

В [1] было описано построение языков $Я_N$ (N — НЧ) и объемлющего их языка $Я_\omega$. Язык $Я_\omega$ замкнут относительно бинарных логических связок конъюнкции и импликации: их применение к паре Флω всегда возможно и дает Флω. Язык $Я_\omega$ замкнут также по отношению к отрицанию и к навешиванию квантора общности. Однако в этом языке, вообще говоря, не допускается ни образование дизъюнкций пар Флω, ни навешивание на Флω квантора осуществимости. В настоящей заметке язык $Я_\omega$ расширяется до языка $Я_{\omega|}$, замкнутого относительно всех традиционных логических связок.

Определим формулы языка $Я_{\omega|}$ [Флω|] следующими правилами построения:

Флω|. 1. $$\frac{A\text{—Флω}}{A\text{—Флω|}};$$

Флω|. 2. $$\frac{A \text{ и } B\text{—Флω|; } A \text{ не Флω или } B \text{ не Флω; } \lambda\text{—}\supset \text{ или } \&}{\lambda AB\text{—Флω|}};$$

Флω|. 3. $$\frac{A\text{—Флω|;} \quad A \text{ не Флω;} \quad X\text{—Пн}}{\forall XA\text{—Флω|}};$$

Флω|. 4. $$\frac{A\text{—Флω|;} \quad A \text{ не Фл1;} \quad X\text{—Пн}}{\exists XA\text{—Флω|}}.$$

Здесь отсутствует правило построения дизъюнкций. В дальнейшем они будут введены в $Я_{\omega|}$ в качестве сокращений.

Всякая Флω| представляется в одном и только в одном из следующих видов: A, где A — Флω; λAB, где λ — один из знаков $\supset \&$, A и B — Флω|, причем хотя бы одна из них не есть Флω; $\forall XA$, где X — Пн, A — Флω|, не являющаяся Флω; $\exists XA$, где X — Пн, A — Флω|, не являющаяся Фл1. Во всех случаях указанное представление Флω| единственно.

Определим алгорифм $\mathfrak{H}$, полагая:

$\mathfrak{H}_1$.1. $\mathfrak{H}_1 \llcorner A \lrcorner \rightleftharpoons 0$, когда A — Флω;

$\mathfrak{H}_1$.2. $\mathfrak{H}_1 \llcorner \lambda BC \lrcorner \rightleftharpoons \max \llcorner \mathfrak{H}_1 \llcorner B \lrcorner, \mathfrak{H}_1 \llcorner C \lrcorner \lrcorner + 1$, когда λ — один из знаков $\supset \&$, B и C — Флω|, причем хотя бы одна из них не есть Флω;

$\mathfrak{H}_1$.3. $\mathfrak{H}_1 \llcorner \forall XD \lrcorner \rightleftharpoons \mathfrak{H}_1 \llcorner D \lrcorner + 1$, когда X — Пн, D — Флω|, не являющаяся Флω;

$\mathfrak{H}_1$.4. $\mathfrak{H}_1 \llcorner \exists XE \lrcorner \rightleftharpoons \mathfrak{H}_1 \llcorner E \lrcorner + 1$, когда X — Пн, E — Флω|, не являющаяся Фл1.

Алгорифм $\mathfrak{H}_1$ перерабатывает всякую Флω| в НЧ. $\mathfrak{H}_1 \llcorner A \lrcorner$, где A — Флω|, мы будем называть **высотой** A в языке $Я_{\omega|}$. Флω могут быть охарактеризованы как Флω| высоты 0 в языке $Я_{\omega|}$.

Флω мы будем также называть **нормальными формулами** [НФ]. Мы будем говорить о Флω| A, что она **регулярна**, если $\mathfrak{H}_1 \llcorner A \lrcorner \leqslant 1$. Мы будем говорить о Флω| A, что она **квазирегулярна**, если $\mathfrak{H}_1 \llcorner A \lrcorner \doteq 2$.

Ненормальные регулярные формулы могут быть охарактеризованы как слова вида $\exists XA$, где X — Пн, A — НФ, не являющаяся Фл1. Квазирегулярные формулы могут быть охарактеризованы как слова следующих видов: $\&A\exists XB$, $\&\exists XBA$, $\&\exists XB\exists YC$, $\supset A\exists XB$, $\supset\exists XBA$, $\supset\exists XB\exists YC$, $\forall X\exists YB$, $\exists X\exists YB$, где A, B и C — НФ, причем B и C не являются Фл1.

Для построения семантики языка $Я_{\omega|}$ нам будет нужна xyzФ1 $(x\colon y\Rightarrow z)$, упомянутая в ([16]). Введем обозначение

$$(T\colon U\Rightarrow V)\rightleftharpoons\mathfrak{F}_{1\llcorner}Z\mathfrak{F}_{1\llcorner}Y\mathfrak{F}_{1\llcorner}x\mathfrak{F}_{1\llcorner}z\mathfrak{F}_{1\llcorner}y(x\colon y\Rightarrow z)Y_\lrcorner Z_\lrcorner T_\lrcorner U_\lrcorner V_\lrcorner,$$

где T, U и V — Тм; Y — самая короткая из Пн, отличных от x и z и не входящих в T; Z — самая короткая из Пн, отличных от x и Y и не входящих ни в T, ни в U. Нетрудно видеть, что это определение законно: для $(x\colon y\Rightarrow z)$ оно не дает ничего нового. $(T\colon U\Rightarrow V)$ есть Фл1 и Пр $(T\colon U\Rightarrow V)$ являются Пн, входящие в TUV. ЗФ1 $(P\colon Q\Rightarrow R)$, где P, Q и R — Вд, выражает, что имеется НА в алфавите $a(\ )bd$ с записью P, перерабатывающий Q в R.

Введем также обозначение

$$(T\colon U\Rightarrow XA)\rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons\begin{cases}\&\exists X(T\colon U\Rightarrow X)\forall X\supset(T\colon U\Rightarrow X)A, & \text{если } X \text{ не входит в } TU;\\ \&\exists Y(T\colon U\Rightarrow Y)\forall Y\supset(T\colon U\Rightarrow Y)\mathfrak{F}_{\omega\llcorner}XAY_\lrcorner, & \text{если } X \text{ входит в } TU;\end{cases}$$

здесь T и U — Тм; X — Пн; A — Флω; Y — самая короткая из Пн, не входящих в TU и не являющихся Прω A.

При таких T, U, X и A $(T\colon U\Rightarrow XA)$ есть Флω и Прω $(T\colon U\Rightarrow XA)$ являются отличные от X Прω A и Пн, входящие в TU. ЗФω $(P\colon Q\Rightarrow XA)$, где P и Q — Вд, X — Пн, A — XФω, выражает, что имеется НА в алфавите $a(\ )bd$ с записью P, перерабатывающий Q в такой ВдR, что в $Я_\omega$ верна ЗФω $\mathfrak{F}_{\omega\llcorner}XAR_\lrcorner$.

Нам будут также нужны НА $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ в алфавите $a(\ )bd$ со следующими свойствами:

а) Каждый из алгорифмов $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ перерабатывает всякий Вд в Вд;

б) Для любых Вд Q_1 и Q_2 может быть указан ВдR такой, что $\mathfrak{P}_{1\llcorner}R_\lrcorner\simeq Q_1$ и $\mathfrak{P}_{2\llcorner}R_\lrcorner\simeq Q_2$.

Записи алгорифмов $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ мы обозначим соответственно P_1 и P_2.

Следуя идее Н. А. Шанина ([3]) мы построим теперь *алгорифм выявления конструктивной задачи* Ш, перерабатывающий всякую Флω| в регулярную формулу. Определим алгорифм Ш следующими равенствами:

$$\text{Ш1.}\qquad Ш_\llcorner\&A\exists XB_\lrcorner\rightleftharpoons\begin{cases}\exists X\&AB, & \text{если } X \text{ не есть Пр}\omega\, A;\\ \exists Z\&A\mathfrak{F}_{\omega\llcorner}XBZ_\lrcorner, & \text{если } X\text{—Пр}\omega\, A.\end{cases}$$

$$\text{Ш2.}\qquad Ш_\llcorner\&\exists XBA_\lrcorner\rightleftharpoons\begin{cases}\exists X\&BA, & \text{если } X \text{ не есть Пр}\omega\, A;\\ \exists Z\&\mathfrak{F}_{\omega\llcorner}XBZ_\lrcorner A, & \text{если } X\text{—Пр}\omega\, A.\end{cases}$$

В Ш1 и Ш2 Z есть самая короткая из Пн, не являющаяся Прω $\&AB$.

Ш3. $Ш_\llcorner\&\exists XB\exists YC\rightleftharpoons\exists Z\&(P_1\colon Z\Rightarrow XB)(P_2\colon Z\Rightarrow YC)$, где Z — самая короткая из Пн, отличных от X и от Y и не являющихся Прω$\&AB$.

Ш4. $Ш_\llcorner\supset A\exists XB_\lrcorner\rightleftharpoons\exists Z\supset A(Z\colon\Rightarrow XB)$, где Z — самая короткая из Пн, не являющихся Прω$\supset AB$ и отличных от X.

$$\text{Ш5.}\qquad Ш_\llcorner\supset\exists XBA_\lrcorner\rightleftharpoons\begin{cases}\forall X\supset BA, & \text{если } X \text{ не есть Пр}\omega\, A;\\ \forall Z\supset\mathfrak{F}_{\omega\llcorner}XBZ_\lrcorner A, & \text{если } X\text{—Пр}\omega\, A;\end{cases}$$

здесь Z — самая короткая из Пн, не являющихся Прω $\supset BA$.

$$\text{Ш6.}\qquad Ш_\llcorner\supset\exists XB\exists YC_\lrcorner\rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons\begin{cases}\exists Z\forall X\supset B(Z\colon X\Rightarrow YC), & \text{если } X \text{ не есть Пр}\omega\, C;\\ \exists Z\forall W\supset\mathfrak{F}_{\omega\llcorner}XBW_\lrcorner(Z\colon W\Rightarrow YC), & \text{если } X\text{—Пр}\omega\, C;\end{cases}$$

здесь Z — самая короткая из Пн, не являющихся Прω$\supset BC$; W — самая короткая из Пн, не являющихся Прω$\supset BC$ и отличных от Z.

$$Ш7.\quad Ш_{\llcorner}\forall X\exists YB_{\lrcorner} \rightleftharpoons \begin{cases} \exists Z\forall X\,(Z:\ X\Rightarrow YB), & \text{если } X \not\equiv Y; \\ \exists YB, & \text{если } X \equiv Y; \end{cases}$$

здесь Z — самая короткая из Пн, отличных от X и Y и не являющихся Прω B.

$$Ш8.\quad Ш_{\llcorner}\exists X\exists YB_{\lrcorner} \rightleftharpoons \begin{cases} \exists Z\,(P_1: Z\Rightarrow X\,(P_2:\ Z\Rightarrow YB)), & \text{если } X \not\equiv Y; \\ \exists YB, & \text{если } X \equiv Y; \end{cases}$$

здесь Z та же Пн, как в пункте Ш7.

Ш9. $Ш_{\llcorner}G_{\lrcorner}\rightleftharpoons G$.

Ш10. $Ш_{\llcorner}\lambda DE_{\lrcorner}\rightleftharpoons Ш_{\llcorner}\lambda Ш_{\llcorner}D_{\lrcorner}Ш_{\llcorner}E_{\lrcorner\lrcorner}$.

Ш11. $Ш_{\llcorner}\varkappa XF_{\lrcorner}\rightleftharpoons Ш_{\llcorner}\varkappa XШ_{\llcorner}F_{\lrcorner\lrcorner}$.

В пунктах Ш1—Ш11 A — любая НФ; B и C — любые НФ, не являющиеся Фл1; λ — один из знаков $\supset\&$; $\varkappa$ — один из знаков $\forall$, $\exists$; D и E — любые Флω| такие, что хотя бы одна из них не регулярна; F — любая нерегулярная Флω|, G — любая регулярная Флω|.

Пункты Ш1 — Ш8 определяют $Ш_{\llcorner}K_{\lrcorner}$ для любой квазирегулярной Флω|K. При этом $Ш_{\llcorner}K_{\lrcorner}$ оказывается регулярной формулой. Присоединяя пункт Ш9, получаем определение $Ш_{\llcorner}K_{\lrcorner}$ для Флω|K таких, что $\mathfrak{H}_{1\llcorner}K_{\lrcorner}\leqslant 2$, причем $Ш_{\llcorner}K_{\lrcorner}$ оказывается регулярной формулой. Наконец, пункты Ш10 и Ш11 обеспечивают индуктивное определение $Ш_{\llcorner}K_{\lrcorner}$ как регулярной формулы для $\mathfrak{H}_{1\llcorner}K_{\lrcorner}>2$. Индукция проходит по высоте Флω|K в языке $Я_{\omega|}$. Таким образом, мы определили Ш как алгорифм, перерабатывающий любую Флω| в некоторую регулярную Флω|.

Параметры в языке $Я_{\omega|}$[Прω|] Флω| и алгорифм подстановки в языке $Я_{\omega|}$, обозначаемый $\mathfrak{F}_{\omega|}$, определяются естественным образом. Флω| без Прω| называются замкнутыми формулами языка $Я_{\omega|}$[ЗФω|].

Алгорифм Ш сохраняет Прω|: набор Прω| Флω|K совпадает с набором Прω| Флω| $Ш_{\llcorner}K_{\lrcorner}$. В частности, алгорифм Ш перерабатывает всякую ЗФω| в ЗФω|.

Определим теперь наше понимание ЗФω| с помощью следующих семантических соглашений:

Ссω|.1. Всякая ЗФω выражает на языке $Я_{\omega|}$ то же, что на языке $Я_{\omega}$.

Ссω|.2. Всякая ЗФω| вида $\exists XA$, где X—Пн, A—XФω, не являющаяся Фл1, выражает на языке $Я_{\omega|}$, что мы в состоянии указать такой Вд, что верна ЗФω| $\mathfrak{F}_{\omega\llcorner}XAQ_{\lrcorner}$.

Ссω|.3. Всякая ЗФω|, не являющаяся регулярной, выражает на языке $Я_{\omega|}$ то же, что регулярная ЗФω| $Ш_{\llcorner}K_{\lrcorner}$.

Эти соглашения полностью определяют наше понимание ЗФω|; пункты Ссω|.1 и Ссω|.2 определяют понимание регулярных замкнутых Флω|; пункт Ссω|.3 сводит понимание произвольных замкнутых Флω| к пониманию замкнутых регулярных Флω|.

Язык $Я_1$ содержится в языке $Я_{\omega|}$ в качестве подъязыка: всякая Фл1 есть Флω|, всякая ЗФ1 есть ЗФω| и ЗФ1 верна в $Я_{\omega|}$ тогда и только тогда, когда она верна в $Я_1$. Поскольку $Я_1$ содержится в $Я_{\omega|}$, в $Я_{\omega|}$ ограниченно применима бинарная связка $\vee$. Мы расширим область ее применения, введя в качестве сокращения обозначение

$$\vee AB\rightleftharpoons\exists Z\&\supset(Z=)A\supset(Z\neq)B,$$

где A и B — такие Флω|, что хотя бы одна из них не есть Фл1, Z — самая короткая из Пн, не являющихся ни Прω| A, ни Прω|B. $\vee AB$ есть Флω|, каковы бы ни были Флω| A и B.

Прω| $\vee AB$ являются Прω| A и Прω| B.

Нетрудно видеть, что ЗФω| $\vee AB$, где A и B — ЗФω|, верна тогда и только тогда, когда мы владеем методом, дающим верную ЗФω|, совпадающую с A или с B.

Нетрудно также видеть, что ЗФ1 $\&AB$, где A и B — ЗФω|, верна тогда и только тогда, когда верны обе ЗФω| A и B.

Доказательство следующей теоремы основывается на тезисе Чёрча.

Теорема. ЗФω| $\forall XH$, *где* X—Пн, H—XФω| *верна в языке* $Я_{\omega|}$ *тогда и только тогда, когда мы владеем общим методом доказательства любой* ЗФω| *вида* $\mathfrak{F}_{\omega\llcorner}XHQ_{\lrcorner}$, *где* Q — *произвольный* Вд.

Как и в языке $Я_{\omega}$, в языке $Я_{\omega|}$ может быть введено отрицание в качестве сокращенного обозначения:

$$\neg A \rightleftharpoons \supset A(\neq),$$

где A — любая Флω|.

Действует правило Modus ponens: *всякий раз, когда* ЗФω| A *и* B *таковы, что в* $Я_{\omega|}$ *верны* ЗФω| A *и* $\supset AB$, *в* $Я_{\omega|}$ *верна* ЗФω| B.

В $Я_{\omega|}$ верны ЗФω| следующих видов:

$$\supset A\supset BA \qquad \supset\supset AB\supset\supset A\supset BC\supset AC \qquad \supset A\supset B\&AB$$
$$\supset\&ABA \qquad \supset\&ABB \qquad \supset A\vee AB \qquad \supset B\vee AB$$
$$\supset\supset AC\supset\supset BC\supset\vee ABC \qquad \supset\neg A\supset AB \tag{1}$$
$$\supset\forall X\supset AD\supset A\forall XD \qquad \supset\forall XD\mathfrak{F}_{\omega|\llcorner}XDQ_{\lrcorner}$$
$$\supset\mathfrak{F}_{\omega|\llcorner}XDQ_{\lrcorner}\exists XD \qquad \supset\forall X\supset DA\supset\exists XDA$$
$$\supset\forall X\vee D\neg D\supset\neg\neg\exists XD\exists XD.$$

Здесь A, B и C — любые ЗФω|; X—Пн; D — любая XФω|; Q—Вд. Формульная схема (1) выражает принцип конструктивного подбора ([2]). Ее доказательство не требует предварительного содержательного признания этого принципа.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
31 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. А. Марков*, ДАН, т. 214, а) № 1, б) № 2, в) №№ 3–6 (1974). [2] *А. А. Марков*, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 67 (1962). [3] *Н. А. Шанин*, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 52 (1953).