Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 5

УДК 519.24 *МАТЕМАТИКА*

А. А. ТЕМПЕЛЬМАН

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ И ДОПУСТИМЫЕ ОЦЕНКИ МНОГОМЕРНОГО СДВИГА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 31 V 1973)

Пусть E_m — m-мерное эвклидово пространство, $1\leqslant m<\infty$, $|\cdot|$ — норма в E_m; $X_1, \ldots, X_n$ — E_m-значные случайные векторы с (известной) совместной плотностью распределения $f(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i\in E_m$. Требуется оценить вектор θ ($\in E_m$) по наблюденным значениям случайных величин $Z_1=\theta+X_1, \ldots, Z_n=\theta Z+X_n$.

Напомним некоторые определения. Пусть $Q(x)$ — произвольная положительно определенная квадратичная форма на E_m. Для любой оценки $\hat\theta=\hat\theta(Z_1, \ldots, Z_n)$ определим функцию риска $R_{\hat\theta}(\cdot)$:

$$R_{\hat\theta}(\theta)=\mathbf{E}_\theta[Q(\hat\theta-\theta)]=\int\limits_{E_m^n} Q(\hat\theta-\theta)f(z_1-\theta, \ldots, z_n-\theta)\,dz_1\ldots dz_n.$$

Говорят, что оценка $\hat\theta_1$ лучше оценки $\hat\theta_2$, если $R_{\hat\theta_1}(\theta)\leqslant R_{\hat\theta_2}(\theta)$ при всех $\theta\in E_m$ и $R_{\hat\theta_1}(\theta_0)<R_{\hat\theta_2}(\theta_0)$ при некотором $\theta\in E_m$. Оценка $\hat\theta$ допустима, если не существует оценки лучшей, чем $\hat\theta$.

При $n>1$ обозначим:

$$u(y)=\int\limits_{E_m} f(x, x+y_1, \ldots, x+y_{n-1})\,dx,$$

где $y=(y_1, \ldots, y_{n-1})\in E_m^{n-1}$; ν — мера в E_m^{n-1} с плотностью $u(y)$;

$$\varphi(y)=(u(y))^{-1}\int\limits_{E_m} xf(x, x+y_1, \ldots, x+y_{n-1})\,dx,$$

$$h(x, y)=(u(y))^{-1}f(x+\varphi(y), x+\varphi(y)+y_1, \ldots, x+\varphi(y)+y_{n-1}).$$

При $n=1$ положим:

$$E_m^0=\{0\};\quad \nu(\{0\})=1,\quad h(x, 0)=f\Bigl(x+\int\limits_{E_m} tf(t)\,dt\Bigr).$$

В дальнейшем предполагается, что

$$\int\limits_{E_m} |x|f(x, x+y_1, \ldots, x+y_{n-1})\,dx<\infty$$

при ν-почти всех $y\in E_m^{n-1}$ (это условие выполнено, если $\mathbf{E}|X_1|<\infty$). Тогда функции $\varphi(y)$ и $h(x, y)$ определены при ν-почти всех $y\in E_m^{n-1}$, причем $h(\cdot, y)$ при ν-почти всех y является плотностью распределения вероятностей на E_m и

$$\int\limits_{E_n} xh(x, y)\,dx=0.$$

В ряде работ (см. ([1-4]) и цитированную там литературу) исследовался вопрос о допустимости обобщенных байесовских оценок, т. е. оценок вида

$$\hat{\theta}_g=\frac{\int\limits_{E_m}\tau f(Z_1-\tau,\ldots,Z_n-\tau)\,g(\tau)\,d\tau}{\int\limits_{E_m}f(Z_1-\tau,\ldots,Z_n-\tau)\,g(\tau)\,d\tau},$$

где $g(\cdot)$ — измеримая неотрицательная функция. Стейн ([3, 4]) установил, что оценка Питмена $\hat{\pi}$ ($\hat{\pi}=\hat{\theta}_g$ с $g(\tau)\equiv 1$) допустима при $m=1$, если

$$\int\limits_{E_1^{n-1}}\left(\int\limits_{E_1}x^2h(x,y)\,dx\right)^{3/2}\nu(dy)<\infty, \tag{S}$$

а также при $m=2$, если $X_1,\ldots,X_n$ — нормальные случайные векторы, и недопустима при $m\geqslant 3$. Отметим также, что в недавней работе Брауна ([1]) найден критерий допустимости оценок $\hat{\theta}_g$ при нормальных $X_1,\ldots,X_n$.

В настоящей заметке рассматриваются оценки $\hat{\theta}_g$, у которых весовыми функциями g служат функции Грина случайных блужданий в E_m; сформулированы теоремы о допустимости некоторых оценок из этого класса.

Рассмотрим в E_m случайное блуждание, определяемое произвольной плотностью распределения вероятностей p («блуждание (p)»): в момент времени k, $k=1,2,\ldots$, блуждающая частица находится в точке $\xi_k=\eta_1+\ldots+\eta_k$, где η_i — независимые E_m-значные случайные векторы с плотностью распределения p. Обозначим: p^{*j} — j-я степень плотности p относительно свертывания;

$$g_p{}^k(\theta)=\sum_{j=1}^{k}p^{*j}(\theta);\qquad g_p(\theta)=\sum_{j=1}^{\infty}p^{*j}(\theta)$$

(функция Грина блуждания (p)), если блуждание (p) невозвратно, и $g_p(\theta)\equiv 1$, если оно возвратно; Γ — семейство всех обобщенных байесовских оценок $\hat{\gamma}_p=\hat{\theta}_{g_p}$ при всевозможных вероятностных плотностях p на E_m. Очевидно, $\hat{\gamma}_p=\hat{\pi}$ тогда и только тогда, когда блуждание (p) возвратно. Поскольку при $m\geqslant 3$ в E_m нет возвратных блужданий, $\hat{\pi}\in\Gamma$ лишь при $m\leqslant 2$.

Следующая теорема показывает, что всякая оценка $\hat{\gamma}_p$ из Γ является пределом обычных байесовских оценок $\hat{\theta}_{g_p^k}$.

Теорема 1. *Если*

$$\int\limits_{E_m{}^n}|x_1-\varphi(x_2-x_1,\ldots,x_n-x_1)|\,f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n<\infty, \tag{1}$$

то для любой плотности p, при любом $\theta\in E_m$ с вероятностью 1 определена и конечна оценка $\hat{\gamma}_p$ и существует

$$\lim_{k\to\infty}\hat{\theta}_{g_p{}^k}(Z_1,\ldots,Z_n)=\hat{\gamma}_p(Z_1,\ldots,Z_n).$$

Условие (1) выполнено, если $\mathbf{E}|X_1|<\infty$.

В теоремах 2 и 3 установлена допустимость некоторых оценок из класса Γ.

В дальнейшем p_α — плотность устойчивого закона с показателем α на пространстве E_m ($m\geqslant 1$), удовлетворяющая условию:

$$0<C_1\leqslant(1+|\theta|^2)^{\frac{m+\alpha}{2}}p_\alpha(\theta)\leqslant C_2<\infty$$

при всех $\theta\in E_m$ (это условие выполнено, например, если функция $p_\alpha(x)$ сферически симметрична — см. ([5])).

Теорема 2. *Если векторы $X_1, \ldots, X_n$ имеют совместное нормальное распределение, то при любом $0<\alpha\leqslant 2$ оценка $\hat{\gamma}_{p_\alpha}$ допустима.*

Теорема 3. *Если $0<\alpha\leqslant 1$ и*

$$\int_{E_m^{n-1}} \left(\int_{E_m} |x|^{m+3+3\alpha} h(x, y)\, dx \right)^{\frac{2m+3+4\alpha}{m+3+3\alpha}} \nu(dy) < \infty, \qquad (2)$$

то оценка $\hat{\gamma}_{p_\alpha}$ допустима.

Условие (2) выполнено, если $E|X_1|^{2m+3+4\alpha}<\infty$.

Доказательства будут опубликованы в другом месте. Они основаны на применении обобщенной эргодической теоремы Хопфа (см. ([6])) к динамической системе T_θ: $T_\theta(x_1, \ldots, x_n) = (x_1-\theta, \ldots, x_n-\theta)$ с «временем» $\theta \in E_m$, действующей в пространстве $E_m{}^n$ (с мерой Лебега). Обратим внимание на то, что эта динамическая система неконсервативна, даже диссипативна, в смысле классических определений. Она p-консервативна (см. ([6])) тогда и только тогда, когда блуждание (p) возвратно; поэтому лишь в случае возвратного блуждания (p) предельная конструкция оценок $\hat{\gamma}_p$, описанная в теореме 1, приводит к оценке Питмена.

Институт физики и математики
Академии наук ЛитССР
Вильнюс

Поступило
29 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[2] L. D. Brown, Ann. Math. Statist., **42**, 3, 855 (1971). [2] R. H. Farrel, Ann. Math. Statist, **35**, 3, 949 (1964); Сборн. пер. Математика, **12**, 3, 134 (1968). [3] Ch. Stein, Ann. Math. Statist., **30**, 4, 970 (1959). [4] Ch. Stein, Proc. Third Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., **1**, California, 1956, p. 197. [5] Н. Калинаускайте, Лит. матем. сборн., **10**, 4, 727 (1970). [6] А. А. Темпельман, Теория вероятн. и ее применен., **17**, 2, 380 (1972).