Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 4

УДК 534.26 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. М. РАДИН, В. П. ШЕСТОПАЛОВ

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА СФЕРЕ С ОТВЕРСТИЯМИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 14 II 1973)

Рассмотрим краевую задачу дифракции стационарной электромагнитной волны $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ на идеально проводящей поверхности S, образованной путем вырезания в сфере радиуса a части поверхности S' системой параллельных плоскостей:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=ik\mathbf{H},\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=-ik\mathbf{E},\quad [\mathbf{nE}]_S=0, \tag{1}$$

где $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ должны удовлетворять условию на бесконечности, а также иметь требуемые особенности на ребре и в точке нахождения источника первичного поля.

Можно доказать (ввиду громоздкости доказательство опущено), что задача (1) сводится к скалярной путем введения в сферической системе координат r, θ, φ потенциалов Дебая [1] Π_e и Π_m, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца $(\Delta+k^2)\Pi(M)=0$ и краевым условиям при $r=a$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\Pi_e^+)=\frac{\partial}{\partial r}(r\Pi_e^-)=0,\quad \Pi_m^+=\Pi_m^-=0,\quad M\in S,$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial r}(r\Pi_e^+)=\frac{\partial}{\partial r}(r\Pi_e^-),\qquad \Pi_m^+=\Pi_m^-,\\ &\frac{\partial}{\partial r}(r\Pi_m^+)=\frac{\partial}{\partial r}(r\Pi_m^-),\qquad \Pi_e^+=\Pi_e^-,\end{aligned}\right\}\quad M\in S',$$

где знаки + и − в индексах обозначают потенциалы внутри и вне сферической области соответственно.

Разделение переменных в уравнении Гельмгольца определяет $\Pi(M)$ с точностью до неизвестных коэффициентов Фурье x_{mn}, которые после применения граничных условий удовлетворяют системам функциональных уравнений вида

$$\sum_{n=m}^{\infty}(x_{mn}-a_{mn})P_n^m(\cos\theta)=0,\quad \theta\in S',\quad m=0,1,2,\ldots, \tag{2}$$

$$\sum_{n=m}^{\infty}(x_{mn}h_n-b_{mn})P_n^m(\cos\theta)=0,\quad \theta\in S,$$

где $P_n^m(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра, a_{mn}, b_{mn}, $h_n(ka)$ — известные величины, причем

$$\forall n\to\infty\quad \exists C\colon |\varepsilon_n|\leqslant\frac{C}{n^2},\quad \varepsilon_n=1-\frac{h_n}{2n+1}. \tag{3}$$

Целью настоящей статьи является получение бесконечных систем линейных алгебраических уравнений второго рода для определения неизвестных x_{mn}, которые допускают эффективное численное, а при некоторых значениях параметров и аналитическое исследование.

Запишем полиномы Лежандра в интегральной форме Мелера [2]

$$P_n^m(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sin^m\theta}\frac{\Gamma(n+1+m)}{1(m+{}^1/_2)\Gamma(n+1-m)}\times$$

$$\times\int\limits_0^\theta\frac{\cos(n+{}^1/_2)\varphi\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{-m+{}^1/_2}},$$

$$P_n^m(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(-1)^m}{\sin^m\theta}\frac{\Gamma(n+1+m)}{(n+{}^1/_2)\Gamma(m-{}^1/_2)\Gamma(n+1+m)}\times$$

$$\times\int\limits_\theta^\pi\frac{\cos(n+{}^1/_2)\varphi\sin\varphi\,d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{-m+{}^3/_2}},\qquad m\geqslant1$$

(случай $m=0$, а также представления, содержащие $\sin(n+{}^1/_2)\varphi$, которые удобно использовать, когда в уравнениях (2) при $n\to\infty$ h_n ведут себя как n^{-1}, не выписываются ввиду аналогичности последующий рассуждений). Введем новые обозначения:

$$y_{mn}=x_{mn}\frac{\Gamma(n+1+m)}{\Gamma(n+1-m)},\qquad \left.\begin{aligned}\alpha_{mn}&=a_{mn}\\ \beta_{mn}&=\frac{b_{mn}}{2n+1}\end{aligned}\right\}\frac{\Gamma(n+1+m)}{\Gamma(n+1-m)}\tag{5}$$

Считая для определенности, что $S'(\theta)=(0<\theta<\theta_0)$, $S(\theta)=(\theta_0<\theta<\pi)$, преобразуем (2) при помощи (3) – (5) в следующую эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{gathered}\sum_{n=m}^\infty(y_{mn}-\alpha_{mn})\int\limits_0^\theta\frac{\cos(n+{}^1/_2)\varphi\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\varphi)^{-m+{}^1/_2}}=0\qquad\theta\in(0,\theta_0),\\ \sum_{m=n}^\infty[y_{mn}(1-\varepsilon_n)-\beta_{mn}]\int\limits_\theta^\pi\frac{\cos(n+{}^1/_2)\varphi\sin\varphi\,d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{-m+{}^3/_2}}=0,\qquad\theta\in(\theta_0,\pi).\end{gathered}\tag{6}$$

Чтобы обеспечить единственность решения исходной краевой задачи, неизвестные y_{mn} необходимо искать в пространстве последовательностей, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{m=n}^\infty|y_{mn}|^2<\infty$. Если изменить порядок суммирования и интегрирования в (6), то последние превращаются в однородные интегральные уравнения Вольтерра первого рода, которые имеют нулевые решения. Это позволяет избавиться в (6) от интегралов и получить для

y_{mn} следующую систему уравнений:

$$\sum_{n=m}^{\infty} y_{mn}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta=\begin{cases}\sum\limits_{n=n}^{\infty}\alpha_{mn}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta, & \theta\in(0,\theta_0),\\ \sum\limits_{n=m}^{\infty}(\beta_{mn}+y_{mn}\varepsilon_n)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta, & \theta\in(\theta_0,\pi),\end{cases}$$

откуда следует, что y_{mn} удовлетворяют бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода

$$y_{ms}=A_{ms}+\sum_{n=m}^{\infty} B_{ns}y_{mn},\quad s=m,m+1,\ldots, \tag{7}$$

где

$$A_{ms}=\frac{1}{1-\varepsilon_s}\left\{\beta_{ms}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=m}^{\infty}(\alpha_{mn}-\beta_{mn})\left[\frac{\sin(n-s)\theta_0}{n-s}+\frac{\sin(n+s+1)\theta_0}{n+s+1}\right]\right\},$$

$$B_{ns}=\frac{1}{\pi(1-\varepsilon_s)}\left[\frac{\sin(n-s)\theta_0}{n-s}+\frac{\sin(n+s+1)\theta_0}{n+s+1}\right]\varepsilon_n.$$

Используя оценку (3), легко показать, что $\sum\limits_{n,s}|B_{ns}|^2<\infty$. В частности, для малых θ_0 имеем $\sum\limits_{n,s}|B_{ns}|^2<C(ka)\theta_0$, и эта сумма может быть меньше единицы.

Отметим, что результат (7) при помощи аналогичных рассуждений можно получить также в терминах метода сингулярного интегрального уравнения и метода задачи Римана — Гильберта.

В качестве примера рассмотрим задачу об излучении электрического диполя, помещенного в центр полой идеально проводящей сферы со срезанной «шапкой». Азимутальный угол θ_0 определяет величину среза сферы. Ось диполя выбрана для простоты перпендикулярной плоскости отверстия. Функциональные уравнения (2) для этого случая имеют вид

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{[kaj_n(ka)]'}P_n^1(\cos\theta)=\frac{\sin\theta}{[kaj_1(ka)]'},\quad \theta\in(0,\theta_0),\\ \sum_{n=1}^{\infty}x_n[kah_n^{(1)}(ka)]'P_n^1(\cos\theta)=0,\quad \theta\in(\theta_0,\pi),\end{gathered}\tag{8}$$

где x_n — коэффициент Фурье для поля во внешней области, $j_n(ka)$, $h_n^{(1)}(ka)$ — сферические функции Бесселя.

Введем новые неизвестные

$$y_n=x_n\{[kaj_n(ka)]'\}^{-1}n(n+1)$$

и малый параметр

$$\varepsilon_n=1+4ika\frac{[kaj_n(ka)]'[kah_n^{(2)}(ka)]'}{2n+1}$$

Заметим, что ε_n при $n\to\infty$ убывают как n^{-2}.

Применим к (8) преобразование (4). Тогда для y_n получается бесконечная система линейных алгебраических уравнений второго рода

$$\pi(1-\varepsilon_n)y_s=2\left[\frac{\sin(s-1)\theta_0}{s-1}+\frac{\sin(s+2)\theta_0}{s+2}\right]-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}y_n\varepsilon_n\left[\frac{\sin(s-n)\theta_0}{s-n}+\frac{\sin(s+n+1)\theta_0}{s+n+1}\right],$$

$$s=1,\ 2,\ 3,\ldots,$$

которая порождает в гильбертовом пространстве вполне непрерывный оператор. Эта система может быть эффективно использована для численных расчетов. Для $ka=1$, $\theta_0=1$ рад ниже приведены результаты расчетов x_n:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} x_1=-3{,}931\cdot10^{-1}, && \operatorname{Re} x_3=-6{,}778\cdot10^{-4},\\ &\operatorname{Im} x_1=-1{,}389\cdot10^{-1}, && \operatorname{Im} x_3=\ \ 1{,}764\cdot10^{-4},\\ &\operatorname{Re} x_2=-2{,}293\cdot10^{-2}, && \operatorname{Re} x_4=\ \ 1{,}054\cdot10^{-5},\\ &\operatorname{Im} x_2=\ \ 4{,}794\cdot10^{-3}, && \operatorname{Im} x_4=-1{,}344\cdot10^{-6}. \end{aligned}$$

Видно, что x_n быстро убывают с ростом n.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
7 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестфаль. Теории дифракции, М., 1964.
[2] А. Кратцер, В. Франк, Трансцендентные функции, ИЛ, 1963.