Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 5

УДК 519.44 *МАТЕМАТИКА*

П. М. ГУДИВОК

О МОДУЛЯРНЫХ И ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

(Представлено академиком В. М. Глушковым 14 VI 1973)

Пусть L — поле характеристики $p>0$ или кольцо всех целых величин конечного расширения F поля рациональных p-адических чисел Q_p, G — конечная группа и LG — групповое кольцо группы G над кольцом L. В настоящей работе исследуется связь между L-представлениями группы G и ее подгрупп. В дальнейшем под LG-модулями будем понимать LG-модули с конечными L-базисами.

Теорема 1. *Пусть H_1 — подгруппа конечной p-группы H, $p\neq 2$, Z_p — кольцо целых рациональных p-адических чисел и M — неприводимый Z_pH_1-модуль.*

Тогда $M^H=Z_pH\otimes_{Z_pH_1}M$ является неразложимым Z_pH-модулем.

Доказательство теоремы опирается на результаты Грина ([1]) об индуцированных L-представлениях конечных p-групп.

Следствие 1. *Пусть N — неразложимый Z_pH_1-модуль и*

$$Q_p\otimes_{Z_p}N=N_1^{(r_1)}\dotplus\ldots\dotplus N_k^{(r_k)},\qquad p\neq 2,$$

где $N_1,\ldots,N_k$ — попарно неизоморфные неприводимые Q_pH_1-модули и $N_i^{(r_i)}$ — прямая сумма r_i экземпляров модуля N_i. Если хотя бы одно r_i равно единице, то $N^H=Z_p\otimes_{Z_pH_1}N$ — неразложимый Z_pH-модуль.

Следствие 2. *Пусть H_1 — абелева подгруппа p-группы H, $p\geqslant 2$, и J — неразложимый левый идеал кольца Z_pH_1. Тогда J^H — неразложимый Z_pH-модуль.*

Следствие 3. *Пусть H_1 — циклическая подгруппа порядка p^r, $r\leqslant 2$, p-группы H и N — произвольный неразложимый Z_pH_1-модуль.*

Тогда N^H — неразложимый Z_pH-модуль.

Доказательство следствия 3 вытекает из строения неразложимых Z_pH_1-модулей ([2–4]) и следствия 1 из теоремы 1.

Следствие 4. *Пусть G — конечная группа, являющаяся прямым произведением p-группы H, $p\neq 2$, и конечной группы G_1. Если M — неприводимый Z_pH-модуль и M_1 — неразложимый Z_pG_1-модуль, то Z_pG-модуль $M\# M_1$ неразложим ($M\# M_1$ — внешнее тензорное произведение Z_pH-модуля M и Z_pG_1-модуля M_1).*

Доказательство следствия 4 получается из теоремы 1 и формулы ([5])

$$\mathrm{Hom}_{Z_pG}(M\# M_1,\,M\# M_1)\cong\mathrm{Hom}_{Z_pH}(M,\,M)\otimes_{Z_p}\mathrm{Hom}_{Z_pG_1}(M_1,\,M_1).$$

Нетрудно построить пример (G — прямое произведение группы кватернионов и группы порядка 3), показывающий, что следствие 4 из теоремы 1 не имеет места при $p=2$. Отметим, что теорема 1 справедлива и при $p=2$, если считать, что M — такой неприводимый Z_2H_1-модуль, что $\mathrm{Hom}_{Q_2H_1}(M',M')$ является полем ($M'=Q_2\otimes_{Z_2}M$).

Замечание 1. Если V — полное дискретно нормированное кольцо характеристики $p>0$, H_1 — подгруппа p-группы H и J — левый идеал группового кольца VH_1, то J^H — неразложимый VH-модуль.

Теорема 2. *Пусть $G=H\times B$ — конечная группа, являющаяся прямым произведением своей силовской p-подгруппы H и подгруппы B. Произвольный неразложимый Z_pG-модуль тогда и только тогда является внешним тензорным произведением неразложимого Z_pH-модуля и неприводимого Z_pB-модуля, когда поле Q_p является полем разложения группы B или группа H циклична порядка p^r, $r\leqslant 2$.*

Доказательстве теоремы 2 используются результаты работ ([2–5]).

Очевидно, что если R — кольцо целых величин конечного расширения F поля Q_p и F является полем разложения группы $G=H\times B$, то каждый неразложимый RG-модуль является внешним тензорным произведением неразложимого RH-модуля и неприводимого RB-модуля (см. ([5])).

Теорема 3. *Пусть K — конечное поле характеристики $p>0$ и $G=H\times\times B$, где H — силовская p-подгруппа группы G. Произвольный неразложимый KG-модуль тогда и только тогда является внешним тензорным произведением неразложимого KH-модуля и неприводимого KB-модуля, когда K является полем разложения группы B или группа H циклична.*

Доказательство теоремы 3 опирается на тот факт, что для любого конечного расширения $K(\theta)$ поля K существует такой неразложимый KH-модуль (H — нециклическая p-группа), что $\mathrm{Hom}_{KH}(M, M)/N\cong K(\theta)$ (N — радикал алгебры $\mathrm{Hom}_{KH}(M, M)$).

Пусть L — поле или дискретно нормированное кольцо с полем частных S характеристики 0, G — конечная группа, $a(LG)$ — кольцо L-представлений группы G и $A(LG)=Q\otimes_Z a(LG)$ (см. определение $a(LG)$ в ([6])), где Q — поле рациональных чисел, а Z — кольцо целых рациональных чисел. Нетрудно проверить, что если $G=G_1\times G_2$, то кольцо $a(LG_1)\otimes_Z a(LG_2)$ гомоморфно отображается в кольцо $a(LG)$ с помощью отображения

$$\psi([M_1]\otimes[M_2])\neq[M_1\# M_2], \tag{1}$$

где M_i есть LG_i-модуль и $[M_i]\in a(LG_i)$, $i=1, 2$.

Лемма. 1. *Если $G=G_1\times G_2$, $(|G_1|), |G_2|)=1$ и L — поле или дискретно нормированное кольцо с полем частных S характеристики 0, то* $\mathrm{Ker}\,\psi=0$.

Нетрудно показать, что если $G=G_1\times G_2$ и $(|G_1|, |G_2|)=1$, то

$$A(QG_1)\otimes_Q A(QG_2)\cong A(QG).$$

Можно построить пример (G — прямое произведение группы кватернионов и группы порядка 3), показывающий, что при $L=Q$ и $(|G_1|, |G_2|)=1$ $\mathrm{Coker}\,\psi$ не всегда равно 0. Отсюда следует, что ошибочен один из основных результатов работы ([7]).

Предложение 1. *Пусть K — конечное поле характеристики $p>0$ и $G=H\times B$, где H — силовская p-подгруппа группы G. Отображение ψ* (см. (1)) *является изоморфным отображением кольца $a(KH)\otimes_Z a(KB)$ на кольцо $a(KG)$ тогда и только тогда, когда K является полем разложения группы B или группа H циклична.*

Доказательство предложения 1 нетрудно получить из теоремы 3 и леммы 1.

Очевидно, если L — алгебраически замкнутое поле, G_1, G_2 — произвольные конечные группы и $G=G_1\times G_2$, то отображение ψ кольца $a(LG_1)\otimes_Z a(LG_2)$ в кольцо $a(LG)$ мономорфно.

Предложение 2. *Пусть Z_p — кольцо целых рациональных p-адических чисел и $G=H\times B$, где H — силовская p-подгруппа группы G. Отображение ψ (см. (1)) является изоморфным отображением кольца $a(Z_pH)\otimes_Z a(Z_pB)$ на кольцо $a(Z_pG)$ тогда и только тогда, когда поле Q_p является полем разложения группы B или H — циклическая группа порядка p^r, $r\leqslant 2$.*

Доказательство предложения 2 легко следует из теоремы 2 и леммы 1.

Теорема 4. *Пусть F — конечное расширение поля рациональных p-адических чисел Q_p, R — кольцо всех целых величин поля F, $\overline{R}=R/tR$ (t — простой элемент кольца R) и G — конечная группа, являющаяся прямым произведением своей силовской p-подгруппы H и группы B. Предположим, что поле F содержит первообразный корень степени m из 1, где m — экспонента группы G. Каждый неразложимый $\overline{R}G$-модуль тогда и только тогда получается редукцией из некоторого RG-модуля, когда группа H циклична.*

Доказательство теоремы опирается на теорему Фонга — Свана — Руколайне ([8–10]) о поднятии неприводимых $\overline{R}$-представлений p-разрешимых групп.

Теорема 4 не обобщается на случай, когда группа G является полупрямым произведением групп H и B, $H \triangleleft G$.

Рассмотрим далее связь между задачей описания неразложимых Zp-представлений конечной p-группы и задачей о паре матриц над полем K характеристики p, т. е. задачей об одновременном подобии двух пар матриц над полем K. В случае модулярных представлений p-групп аналогичный вопрос рассматривался в ([11, 12]).

Теорема 5. *Пусть G — конечная p-группа. Задача описания неразложимых Z_p-представлений группы G тогда и только тогда не сводится к задаче о паре матриц над полем характеристики p, когда G — группа типа $(2, 2)$ или циклическая группа порядка p^r ($r\leqslant 2$ при $p\neq 2$ и $r\leqslant 3$ при $p=2$).*

Достаточность теоремы вытекает из работ ([2–4, 13–15]). Необходимость доказывается построением таких Z_p-представлений $\Gamma=\Gamma(A, B)$ группы G, зависящих от произвольных $(n\times n)$-матриц A и B с коэффициентами из Z_p (n — произвольное натуральное число), что их описание сводится к задаче о паре матриц над полем $\overline{Z}_p=Z_p/pZ_p$.

Рассмотрим два типичных случая: 1) $G=(a)$ — циклическая группа порядка p^3, $p\geqslant 3$, 2) G — группа диэдра порядка 8.

Пусть $G=(a)$ — циклическая группа порядка p^3, $p\geqslant 3$. Очевидно, следующее отображение Γ будет Z_p-представлением группы G:

$$a\to\Gamma(A, B)=\begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_3^{(n)} & 0 & \langle t^4E\rangle & 0 & \langle tA\rangle & \langle tB\rangle & 0 & 0 \\ & \tilde{\varepsilon}_3^{(n)} & 0 & \langle t^2E\rangle & \langle E\rangle & 0 & 0 & 0 \\ & & \tilde{\varepsilon}_2^{(n)} & 0 & \langle uE\rangle & 0 & \langle E\rangle & 0 \\ & & & \tilde{\varepsilon}_2^{(n)} & 0 & \langle uE\rangle & 0 & \langle E\rangle \\ & & & & \tilde{\varepsilon}_1^{(n)} & 0 & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & & & \tilde{\varepsilon}_1^{(n)} & 0 & 0 \\ & & & & & & E & 0 \\ & & & & & & & E \end{bmatrix},$$

где ε_i — первообразный корень степени p^i из 1, $i=1, 2, 3$, $t=1-\varepsilon_3$, $u=1-\varepsilon_2$, $\tilde{\varepsilon}_i^{(n)}=\tilde{\varepsilon}_i\times E$, E — единичная матрица порядка n, A и B — произвольные $(n\times n)$-матрицы над кольцом Z_p (остальные обозначения см. в ([13])). Если Z_p-представления $\Gamma(A, B)$ и $\Gamma(A', B')$ эквивалентны над кольцом Z_p, то можно показать, что существует такая унимодулярная Z_p-матрица C, что

$$C^{-1}AC\equiv A' \pmod p), \qquad C^{-1}BC\equiv B' \pmod p).$$

Отсюда и из ([13]) сразу следует доказательство необходимости в случае, когда G — циклическая p-группа.

Пусть, далее, G — группа диэдра порядка 8: $a^4=b^2=1$, $b^{-1}ab=a^{-1}$. Легко проверить, что следующее отображение $\Gamma=\Gamma(A, B)$ группы G в группу $GL(6n, Z_2)$ является Z_2-представлением группы G:

$$\Gamma(a)=\begin{bmatrix} \tilde{i}^{(n)} & 0 & 0 & \langle E\rangle & \langle A\rangle \\ & E & 0 & E & 0 \\ & & -E & 0 & E \\ & \mathbf{0} & & -E & 0 \\ & & & & E \end{bmatrix},\quad \Gamma(b)=\begin{bmatrix} T^{(n)} & 0 & 0 & \langle iE\rangle & \langle -A\rangle \\ & E & 0 & 0 & B \\ & & -E & E & 0 \\ & \mathbf{0} & & E & 0 \\ & & & & -E \end{bmatrix},$$

где

$$\tilde{i}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ i^4=1,\quad T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \langle i\rangle=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \langle\alpha\rangle=\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix},\quad \alpha\in Z_2,$$

E — единичная матрица порядка n, A и B — произвольные Z_2-матрицы порядка n (остальные обозначения см. в ([13])).

Нетрудно показать, что Z_2-представления $\Gamma(A, B)$ и $\Gamma(A', B')$ группы G Z_2-эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такая унимодулярная Z_2-матрица C, что $C^{-1}AC\equiv A'\ (\mathrm{mod}\ 2)$, $C^{-1}BC\equiv B'\ (\mathrm{mod}\ 2)$. Тем самым доказана необходимость в том случае, когда G — группа диэдра. Во всех остальных случаях строятся неразложимые Z_p-представления группы G вида $\Gamma(A, B)$ с 5 или 6 различными Q_p-неприводимыми компонентами, причем представления $\Gamma(A, B)$ и $\Gamma(A', B')$ группы G Z_p-эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такая унимодулярная Z_p-матрица C, что

$$C^{-1}AC\equiv A'\ (\mathrm{mod}\ p),\ C^{-1}BC\equiv B'\ (\mathrm{mod}\ p).$$

Следствие. *Пусть G — конечная нециклическая p-группа и R — кольцо всех целых величин конечного расширения F поля Q_p. Описание неразложимых R-представлений группы G тогда и только тогда не сводится к задаче о паре матриц над полем характеристики p, когда G является четверной группой и F — неразветвленное расширение поля Q_2.*

Предложение 3. *Пусть G — конечная p-группа и V — полное дискретно нормированное кольцо характеристики p. Задача описания неразложимых V-представлений группы G не сводится к задаче о паре матриц над полем характеристики p тогда и только тогда, когда G — циклическая группа порядка 2.*

Частично предложение 3 было доказано автором в ([16]).

Замечание 2. Пусть R — кольцо целых величин конечного расширения F поля Q_p, G — конечная группа с нормальной силовской p-подгруппой H и $n(RG)$ — число неразложимых R-представлений группы G. Если F является полем разложения группы $B=G/H$, $n(Rg)<\infty$ и $(|B|, 2)=1$, то можно дать полное описание всех неразложимых R-представлений группы G через неразложимые R-представления группы H и неприводимые R-представления группы B.

Отметим, что если L — поле характеристики p, H — нормальная силовская p-подгруппа группы G и $n(LG)<\infty$, то все неразложимые L-представления группы G были описаны С. Д. Берманом ([17]).

Ужгородский государственный университет

Поступило 31 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. A. Green, Math. Zs., 79, 100 (1962). [2] А. В. Ройтер, Вестн. Ленингр. унив., сер. матем., 19, 65 (1960). [3] С. Д. Берман, П. М. Гудивок, ДАН, 145, № 6, 1199 (1962). [4] A. Heller, I. Reiner, Bull. Am. Math. Soc., 68, № 3, 210 (1962). [5] A. Jones, Canad. J. Math., 15, 625 (1963). [6] I. Reiner, Bull. Am. Math. Soc., 76, № 2, 159 (1970). [7] M. Hikari, Osaka J. Math., 8, № 2, 299 (1971). [8] P. Fong, Trans. Am. Math. Soc., 98, № 2, 263 (1961). [9] R. G. Swan, Topology, 2, № 2, 85 (1963). [10] А. В. Руколайне, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 3, 571 (1964). [11] С. А. Кругляк, ДАН, 153, № 6, 1253 (1963). [12] S. Brenner, J. Algebra, 15, 89 (1970). [13] С. Д. Берман, П. М. Гудивок, Изв. АН СССР, сер. матем., 29, № 4, 875 (1964). [14] А. В. Яковлев, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. инст. АН СССР, 28, 93 (1972). [15] Л. А. Назарова, ДАН, 140, № 5, 1011 (1961). [16] П. М. Гудивок, Доп. АН УРСР, сер. А, № 8, 683 (1971). [17] С. Д. Берман, Изв. АН СССР, сер. матем., 30, № 1, 69 (1966).