Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 5

УДК 531.381 *МАТЕМАТИКА*

В. Г. ДЕМИН, Ф. И. КИСЕЛЕВ

НОВЫЙ КЛАСС ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В НЬЮТОНОВСКОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 18 VI 1973)

Рассмотрим движение твердого тела, одна точка которого закреплена в центральном ньютоновском поле тяготения. Будем предполагать, что тело близко к динамически симметричному и имеет место один из двух случаев: либо его центр инерции находится достаточно близко к закрепленной точке, либо оно приведено во вращение с достаточно большой по модулю угловой скоростью. В обоих случаях при надлежащем введении малого параметра методом Пуанкаре можно доказать существование семейства периодических решений.

Для описания движения воспользуемся каноническими переменными Депри ([1]) L, G, H, l, g, h; здесь G — модуль кинетического момента, а L и H суть проекции кинетического момента соответственно на главную ось инерции, соответствующую меньшему моменту инерции, и на радиус-вектор, проведенный из притягивающего центра в закрепленную точку; величины l, g, h — канонические угловые переменные, сопряженные с L, G, H соответственно.

Движение тела будет определяться гамильтонианом

$$K=T-U, \tag{1}$$

где кинетическая энергия T и силовая функция U

$$T=\frac{G^2-L^2}{2AB}(A\cos^2 l+B\sin^2 l)+\frac{L^2}{2C}, \tag{2}$$

$$U=-\frac{P}{g_0}(x_C\gamma+y_C\gamma'+z_C\gamma'')-\frac{3P}{2g_0R}(A\gamma^2+B\gamma'^2+C\gamma''^2). \tag{3}$$

В (2) и (3) A, B, C — главные моменты инерции для неподвижной точки, P — вес тела, g_0 — ускорение силы тяжести, x_C, y_C, z_C — координаты центра инерции тела, γ, γ', γ'' — направляющие косинусы радиуса-вектора закрепленной точки тела в связанной системе координат.

Порождающее решение определим упрощенным гамильтонианом

$$K_0=\frac{G^2-L^2}{4AB}(A+B)+\frac{L^2}{2C}+\frac{PLH}{G^2}z_C, \tag{4}$$

получающимся из (1) усреднением по угловым переменным.

Возмущающая гамильтонова функция при этом будет равна

$$K_1=\frac{G^2-L^2}{4AB}(A-B)\cos 2l-U-\frac{PLH}{G^2}z_C. \tag{5}$$

Общее решение упрощенной системы с гамильтонианом (4) имеет вид

$$\begin{gathered}L=L_0=\text{const},\quad G=G_0=\text{const},\quad H=H_0=\text{const},\\ l=\omega_1 t+\beta_1,\quad g=\omega_2 t+\beta_2,\quad h=\omega_3 t+\beta_3,\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$\omega_1=\frac{A(B-C)+B(A-C)}{2ABC}L_0+\frac{PH_0z_C}{G_0^2}$$

$$\omega_2=\frac{A+B}{2AB}G_0-\frac{2PL_0H_0z_C}{G_0^3}, \tag{7}$$

$$\omega_3=\frac{PL_0z_C}{G_0^2},$$

а β_1, β_2, β_3 — произвольные постоянные.

Заметим, что в согласии с теоремой Колмогорова ([2]) при достаточно малых постоянно действующих консервативных возмущениях возмущенное движение будет условно-периодическим и близким к торам (6), ибо порождающее решение невырождено:

$$\frac{D(K_{0L}', K_{0G}', K_{0H}')}{D(L,G,H)}=\frac{4P^2H_0^2z_C^2}{G_0^5}+$$

$$+\frac{A(B-C)+B(A-C)}{2ABC}\left(\frac{A+B}{2AB}+\frac{6PL_0H_0z_C}{G_0^4}\right)\neq 0. \tag{8}$$

Если потребовать, чтобы порождающее решение было периодическим с периодом

$$T=2\pi k_1/\omega_1=2\pi k_2/\omega_2=2\pi k_3/\omega_3, \tag{9}$$

где k_1, k_2, k_3 — целые числа, что всегда можно добиться надлежащим выбором начальных условий, то при дополнительном предположении о характере соизмеримости частот

$$|k_1|+|k_2|\geqslant 4 \tag{10}$$

нетрудно установить существование периодических решений с периодом (9) и при $K_1\neq 0$. В самом деле, так как среднее значение $\bar{K}_1$ гамильтониана K_1 за период не зависит в этом случае от угловых переменных β_i, то в силу известных условий периодичности решений гамильтоновых систем, указанных А. Пуанкаре ([3]), искомые периодические решения действительно существуют при достаточно малом по модулю $|K_1|$.

В случаях $|k_1|+|k_2|=2$, $|k_1|+|k_2|=3$ условия периодичности

$$\partial\bar{K}_1/\partial\beta_i=0, \quad i=1,\ 2,\ 3, \tag{11}$$

также выполняются, и, следовательно, периодические решения существуют, но с меньшим числом произвольных постоянных.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Deprit, Am. J. Phys., 35, № 5, 424 (1967). [2] А. Н. Колмогоров, ДАН, 98, № 4, 527 (1954). [3] А. Пуанкаре, Избр. тр., 2, «Наука», 1972.