Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 5

УДК 513.85 *МАТЕМАТИКА*

Н. П. ДОЛБИЛИН

О РАДИУСЕ ПОКРЫТИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ n-МЕРНЫХ РЕШЕТОК И ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ИНДЕКСА РАЗДЕЛЕННОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

(Представлено академиком В. С. Владимировым 5 VI 1973)

1°. Пусть в n-мерном эвклидовом пространстве фиксирован ортонормированный базис. Через Λ будем обозначать n-мерную унимодулярную решетку с точкой в начале O координат. Решетка Λ задана, если заданы координаты векторов некоторого ее основного репера относительно рассматриваемого базиса пространства.

Решетка Λ' гиперболически эквивалентна решетке Λ, если существует гиперболический поворот (преобразование, задаваемое в фиксированном базисе диагональной унимодулярной матрицей), переводящий решетку Λ в Λ'.

Радиус покрытия решетки Λ может быть, вообще говоря, каким угодно большим. Тем не менее имеет место

Теорема 1. *Для любой n-мерной унимодулярной решетки существует гиперболически эквивалентная решетка с радиусом покрытия $R\leqslant R(n)$, где $R(n)$ зависит только от числа измерений.*

Доказательство теоремы основано на понятии δ-решетки. Будем для краткости n-мерный прямоугольный параллелепипед с центром O и гранями, параллельными координатным плоскостям, именовать координатным и кроме того будем говорить, что такой параллелепипед пуст, если внутри него нет кроме точки O других точек решетки Λ. Но на границе пустого параллелепипеда могут лежать точки решетки Λ.

Определение. Решетка называется δ-решеткой, если верхняя грань объемов пустых координатных параллелепипедов (п.к.п.) равна $(2\delta)^n$, δ — вещественное положительное число.

По теореме Минковского о выпуклом теле $\delta\leqslant 1$. Заметим, что гиперболически эквивалентные решетки имеют одинаковую характеристику δ.

Если верхняя грань $(2\delta)^n$ для данной решетки Λ достигается на некотором п.к.п., то очевидно, что существует гиперболически ей эквивалентная решетка Λ', для которой куб $\{|x_i|\leqslant\delta,\ i=1,\dots,n\}$ пуст.

Если же верхняя грань $(2\delta)^n$ для решетки Λ не достигается ни на одном п.к.п., то существует последовательность $\{\Lambda_k\}$ решеток, эквивалентных Λ, сходящаяся к некоторой унимодулярной решетке Λ', имеющей ту же характеристику δ, и для которой куб $\{|x_i|\leqslant\delta,\ i=1,\dots,n\}$ пуст.

Доказательство непосредственно следует из леммы Малера о сходимости решеток [1].

Для доказательства теоремы 1, таким образом, достаточно показать, что для любой δ-решетки Λ с пустым кубом $\{|x_i|\leqslant\delta,\ i=1,\dots,n\}$ радиус покрытия не превосходит некоторого числа $R(n)$.

Рассмотрим «бруски»

$$\Pi_j=\{|x_i|\leqslant\delta/(n-1),\quad i\neq j,\quad |x_j|\leqslant\delta(n-1)^{n-1}\},\quad j=1,\ 2,\dots,\ n.$$

Так как Λ есть δ-решетка, то существует вектор $\mathbf{e}_j$ решетки Λ, координаты a_{ji}, $i=1,\dots,n$, которого удовлетворяют неравенствам

$$|a_{ji}|<\delta/(n-1)<\delta\leqslant a_{jj}\leqslant\delta(n-1)^{n-1},\ i\neq j. \tag{1}$$

По известной лемме Адамара система вектора $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ линейно независима. Построенный на этих векторах параллелепипед содержит фундаментальную область решетки Λ. Так как длины его ребер

$$|\mathbf{e}_j| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_{ji}| < (n-1)^{n-1}+1, \quad j=1,\ldots,n,$$

то получается оценка $R(n)$ для ее радиуса покрытия. Такую оценку можно, например, получить, используя элементарную лемму: *расстояние от любой точки параллелепипеда с длинами ребер* $|\mathbf{e}_1|, \ldots, |\mathbf{e}_n|$ *до ближайшей к ней вершины не превосходит* $\frac{1}{2}(|\mathbf{e}_1|^2+\ldots+|\mathbf{e}_n|^2)^{1/2}$. Отсюда следует, что $R(n) \leqslant \frac{1}{2} n^{1/2}[(n-1)^{n-1}+1]$.

Нас интересовал здесь пока лишь факт существования оценки, и поэтому мы использовали далеко не все возможности метода δ-решетки для получения лучшей оценки. Заметим, что отсюда же можно получить для характеристики δ положительную оценку снизу, зависящую только от n, но, правда, очень грубую.

2°. Параллелепипед Π называется разделенным относительно точки $\mathbf{x}$, если все вершины параллелепипеда $\Pi-\mathbf{x}$ (трансляция Π на вектор $-\mathbf{x}$) находятся в разных «октантах» системы координат.

Б. Н. Делоне в известной работе [2], в частности, доказал лемму, которую можно сформулировать так: *пусть* Λ — *двумерная решетка, и пусть* $\mathbf{x}$ — *точка, не сравнимая по модулю* Λ *ни с одной точкой на осях. Тогда существует основной параллелограмм решетки* $\Lambda+\mathbf{x}$, *разделенный относительно* O. Из этой леммы следует доказательство гипотезы Минковского для $n=2$ и существование алгорифма разделенных параллелограммов, который играет в вопросе о произведении двух неоднородных линейных форм от двух переменных такую же роль, какую играет алгорифм непрерывных дробей в изучении произведения двух однородных линейных форм. Далее Делоне заметил, что эта лемма на случай трех и более измерений не обобщается, приведя опровергающий пример.

Индексом I n-мерного параллелепипеда решетки назовем отношение его объема к объему основного параллелепипеда решетки. Для унимодулярной решетки индекс равен объему параллелепипеда.

Теорема 2. *В любой n-мерной решетке относительно любой точки* $\mathbf{x}$ *пространства существует разделенный параллелепипед решетки индекса* $I \leqslant I(n)$, *где* $I(n)$ *не зависит от решетки и выбора точки* $\mathbf{x}$.

Факт существования оценки $I(n)$ непосредственно вытекает из теоремы 1. Но для получения несколько лучшей оценки мы применим метод, аналогичный методу доказательства теоремы 1.

Рассмотрим бруски Π_j, более тонкие и более длинные, чем в первой теореме, а именно:

$$\Pi_j = \{|x_i| \leqslant \tfrac{1}{3}\delta/(n-1), \quad i \neq j, \quad |x_j| \leqslant 3^{n-1}(n-1)^{n-1}\delta\}, \quad j=1,\ldots,n.$$

Так как Λ — δ-решетка, то существует вектор $\mathbf{e}_j=(a_{j1},\ldots,a_{jn})$ решетки Λ, координаты которого удовлетворяют неравенствам

$$|a_{ji}| < \tfrac{1}{3}\delta/(n-1) < \delta \leqslant a_{jj} \leqslant 3^{n-1}(n-1)^{n-1}\delta, \quad i \neq j. \tag{2}$$

n-мерный параллелепипед Π, построенный на векторах $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, имеет объем $V \leqslant [3^{n-1}(n-1)^{n-1}+1]^n$ и содержит фундаментальную область.

Обозначим через Π_0 параллелепипед, построенный на векторах $2\mathbf{e}_1, \ldots, 2\mathbf{e}_n$, а через Π' — параллелепипед $\Pi+\frac{1}{2}(\mathbf{e}_1+\ldots+\mathbf{e}_n)$. Параллелепипед Π_0 разделен относительно любой точки $\mathbf{x} \in \Pi'$. Это вытекает из следующих неравенств, которые при $0\leqslant\alpha_i\leqslant 1$, $\beta_i=0, 2$ выполняются в силу (2):

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\beta_i a_{ij}-\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+{}^1/_2)a_{ij}<0,$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\beta_i a_{ij}+2a_{jj}-\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+{}^1/_2)a_{ij}>0,\quad j=1,\ldots,n.$$

Автор глубоко признателен Б. Н. Делоне за внимание к этой работе.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
17 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Касселс, Введение в геометрию чисел, М., 1965. [2] Б. Н. Делоне, Изв. АН СССР, сер. матем., 11, 505 (1947).