

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Академик АН УССР Я. С. ПОДСТРИГАЧ, Д. А. БАЙДАК, Л. М. ЗОРИЙ

### К ОБОСНОВАНИЮ ДИНАМИЧЕСКОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

Вопросы обоснования динамического метода, играющего основную роль при исследовании колебаний и устойчивости деформируемых систем, имеют принципиальное значение для общей теории и ее приложений. Однако для систем с распределенными параметрами такие вопросы находятся на начальной стадии разработки (<sup>1-4</sup>).

Развиваемый здесь подход к обоснованию динамического метода применим к упругим системам, исследование возмущенных движений которых приводит к смешанной задаче вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(x, t)] + g(x) [\partial^2 u / \partial t^2 + 2c \partial u / \partial t + au] &= F(u, \partial u / \partial x, \dots, \partial^{2n} u / \partial x^{2n}), \\ U_{i0}[u(x, t)]_{x=0} &= 0, \quad U_{i1}[u(x, t)]_{x=1} = 0, \quad i=1, 2, \dots, n; \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \partial u(x, 0) / \partial t = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathcal{L}$  — линейное дифференциальное выражение  $2n$ -го порядка по переменной  $x$ ;  $u(x, t)$  — перемещение рассматриваемой системы; функция  $g(x) > 0$ ; постоянные  $a$  и  $c$  неотрицательные;  $F$  — некоторая нелинейная функция,  $F=0$  при  $u=0$ ;  $U_{i0}, U_{i1}$  — линейные формы относительно  $u, u_x, \dots, u_{x^{n-1}}$ ;  $\varphi(x), \psi(x)$  — некоторые заданные функции. Коэффициенты дифференциального выражения и линейных форм задачи (1) считаются зависящими от переменной  $x$  и параметров примененных к системе нагрузок.

Возмущения  $u(x, t)$  предполагаются принадлежащими множеству  $U$  вещественных непрерывных по совокупности аргументов функций, непрерывно дифференцируемых по порядку  $2n$  включительно по  $x$  и до второго порядка по  $t \in [0, T]$  и удовлетворяющих краевым условиям задачи (1), с нормой

$$\|u\| = \left( \int_0^1 g(x) |u(x, t)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

**Определение.** Нулевое решение задачи (1) называется устойчивым, если для всяких  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  существуют соответственно  $\delta_1, \delta_2 > 0$  такие, что  $\|u\| < \varepsilon_1, \|\partial u / \partial t\| < \varepsilon_2$  при  $t > 0$ , если  $\|\varphi\| < \delta_1$  и  $\|\psi\| < \delta_2$ . Если же это решение устойчиво и, кроме того,  $\|u\| \rightarrow 0, \|\partial u / \partial t\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то говорят об его асимптотической устойчивости.

В дальнейшем определяющей является соответствующая (1) линейная задача на собственные значения:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(x)] - \omega^2 g(x) y(x) &= 0, \\ U_{i0}[y(x)]_{x=0} &= 0, \quad U_{i1}[y(x)]_{x=1} = 0, \quad i=1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

В общем случае она оказывается несамосопряженной многопараметрической задачей. Далее ради простоты считается, что ее собственные значения зависят от одного параметра нагрузки  $p$ . Очевидно, при  $p=0$  они положительны; будем считать их простыми. Тогда существует полуинтервал  $I=[0, p^*)$  изменения параметра  $p$  такой \*, что

$$0 < \omega_1^2(p) < \omega_2^2(p) < \dots < \omega_n^2(p) < \dots, \quad p \in I.$$

Последовательности собственных функций  $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{z_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  задачи (2) и сопряженной к ней образуют, как известно, биортогональную систему функций с весом  $g(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , а каждая из этих последовательностей в отдельности — базис Рисса в пространстве  $L_g^2(0, 1)$  (5).

Предположим, что нелинейность  $F$  и начальные функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  удовлетворяют условиям

$$\|F_1 - F_2\| \leq G(t) \|u_1 - u_2\|^{1+\alpha} \quad \forall u_1, u_2 \in U,$$

где  $F_1, F_2$  — ее значения при  $u=u_1$  и  $u=u_2$  соответственно;  $G(t)$  — некоторая непрерывная положительная функция, характеристический показатель которой  $\gamma^* \leq c$ ;  $\alpha > 0$  — некоторая постоянная;

функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  разлагаются по собственным функциям задачи (2) в регулярно сходящиеся ряды; коэффициенты этих разложений принадлежат некоторому компактному множеству пространства  $l_2$ ; регулярно сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \varphi_n y_n(x), \quad \varphi_n = (\varphi, y_n); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \psi_n y_n(x), \quad \psi_n = (\psi, y_n).$$

Тогда справедливы такие теоремы.

**Теорема 1.** При  $p \in I$  или  $p = p^* + \nu$  ( $\nu > 0$  — достаточно малое число),  $0 \leq t \leq T$  существует единственное решение задачи (1) и  $u(x, t) \in U$ , представимое в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t) y_n(x),$$

причем имеет место двусторонняя оценка

$$m \|u\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \leq M \|u\|^2,$$

где  $m, M$  — постоянные, не зависящие от  $u$ .

**Теорема 2.** Если  $p < p^*$  и  $c < 0$ , то нулевое решение задачи (1) устойчиво асимптотически.

**Теорема 3.** Если  $p = p^* + \nu$ , то нулевое решение задачи (1) неустойчиво.

Доказательство существования и единственности решения рассматриваемой задачи проводится путем сведения ее к эквивалентной задаче для счетной системы интегральных уравнений, получаемой на основании отмеченных выше свойств собственных функций, с последующим применением принципа сжатых отображений.

Теоремы 2 (3) об (не)устойчивости по первому приближению доказаны с помощью применения прямого метода Ляпунова к соответствующей счетной системе дифференциальных уравнений.

\* Значение  $p^*$  параметра нагрузки отвечает эйлерову, или автоколебательному виду потери устойчивости.

Отметим, что данный подход к обоснованию динамического метода распространяется на более сложные задачи для деформируемых систем с распределенными параметрами.

Львовский филиал математической физики  
Института математики  
Академии наук УССР

Поступило  
9 VII 1973

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> В. В. Болотин, Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, М., 1961. <sup>2</sup> М. Я. Леонов, Основы механики упругого тела, Фрунзе, 1963. <sup>3</sup> В. В. Болотин, Э. И. Григoley, Сборн. Механика в СССР за 50 лет, М., 1972. <sup>4</sup> Ю. Н. Новичков, Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, № 1, 189 (1973). <sup>5</sup> М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, М., 1969.