Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 4

УДК 517.5 **МАТЕМАТИКА**

А. ЯНУШАУСКАС

ОБ ОСОБЫХ ТОЧКАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 6 II 1973)

Рассмотрим отображение ω, осуществляемое градиентом гармонической функции g, регулярной в некоторой области $\mathscr{D}$ трехмерного эвклидова пространства R^3. Пусть

$$H(g)=\begin{Vmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{xy} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{xz} & g_{yz} & g_{zz} \end{Vmatrix}, \quad D(g)=\det H(g).$$

В тех точках области $\mathscr{D}$, в которых $D(g)\neq 0$, отображение ω является локальным гомеоморфизмом [1]. В тех же точках области $\mathscr{D}$, в которых $D(g)$ обращается в нуль, отображение ω не может быть локальным гомеоморфизмом, так как $D(g)$ в окрестности таких точек принимает как положительные, так и отрицательные значения, если только $D(g)\not\equiv 0$ [2]. Отсюда, в частности, следует, что множество $\mathscr{M}$: $\{D(g)=0\}$ нулей гессиана $D(g)$ является чисто двумерным вещественно-аналитическим множеством, поскольку на нем обращается в нуль аналитическая функция $D(g)$.

Будем изучать поведение отображения ω в окрестности нулей гессиана $D(g)$ гармонической функции g. У отображения ω могут быть неуниформизируемые точки. *Неуниформизируемой*, или *исключительной*, точкой отображения ω, как и в случае отображений, осуществляемых системами аналитических функций многих комплексных переменных [3], будем называть такую точку $X\in\mathscr{D}$, в любой окрестности $U\subset\mathscr{D}$ которой содержатся точки $Y\neq X$ такие, что $\omega(Y)=\omega(X)$. В силу самого определения исключительные точки не являются изолированными. Множество $\mathscr{N}$ исключительных точек отображения ω является подмножеством множества $\mathscr{M}$.

Пусть отображение ω задается следующими равенствами:

$$u=g_x(X),\quad v=g_y(X),\quad w=g_z(X), \tag{1}$$

и пусть на поверхности $\mathscr{M}$ гессиан $D(g)=0$. Если проходящие через некоторую точку $X_0\in\mathscr{M}$ поверхности уровня функций g_x, g_y, g_z пересекаются по некоторой одномерной линии $\mathscr{L}$, то $\mathscr{L}\subset\mathscr{M}$ и все точки кривой $\mathscr{L}$ являются исключительными точками ω.

Покажем, что все точки гладкой кривой $\mathscr{L}\subset\mathscr{M}$, по которой пересекаются под ненулевым углом поверхности уровня двух компонент градиента g, являются исключительными точками отображения ω. Для определенности будем считать, что на $\mathscr{L}$ постоянны g_x и g_y.

Касательная к кривой $\mathscr{L}$ дается уравнениями

$$\frac{x_1-x}{\begin{vmatrix} g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yy} & g_{yz}\end{vmatrix}}=\frac{y_1-y}{\begin{vmatrix} g_{xz} & g_{xx} \\ g_{yz} & g_{xy}\end{vmatrix}}=\frac{z_1-z}{\begin{vmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{xy} & g_{yy}\end{vmatrix}} \tag{2}$$

а производная g_z по направлению касательной к $\mathscr{L}$ имеет вид

$$\frac{dg_z}{ds}=\frac{1}{Q}D(g)=0,$$

где

$$Q^2 = \begin{vmatrix} g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yy} & g_{yz} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} g_{xz} & g_{xx} \\ g_{yz} & g_{xy} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{xy} & g_{yy} \end{vmatrix}^2,$$

Следовательно, g_z постоянна на $\mathscr{L}$.

Заметим, что все три компоненты grad g не могут принимать постоянные значения на двумерной поверхности, если grad $g \neq$ const ([4]).

В силу того, что в исключительных точках отображения ω, лежащих на кривой $\mathscr{L} \subset \mathscr{M}$, удовлетворяющей соотношению $Q \neq 0$, касательная к $\mathscr{L}$ должна быть перпендикулярной к нормали поверхности $\mathscr{M}$, имеем, что во всех исключительных точках отображения ω выполняются равенства

$$\det E_i(g) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

где $E_i(g)$ обозначает матрицу, получаемую из $H(g)$ заменой i-й строки следующей строкой:

$$\partial D(g)/\partial x, \quad \partial D(g)/\partial y, \quad \partial D(g)/\partial z.$$

Следовательно, все точки поверхности $\mathscr{M}$: $\{D(g) = 0\}$, в которых выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{3} [\det E_i(g)]^2 > 0, \tag{4}$$

являются униформизируемыми точками отображения ω.

Из всего предыдущего имеем следующее утверждение.

Теорема 1. *Если две компоненты градиента функции g постоянны на двумерной поверхности $\mathscr{P}$, то все точки $\mathscr{P}$ являются исключительными для отображения ω.*

Эта теорема следует из аналитичности поверхности $\mathscr{P}$, аналитичности следа третьей компоненты grad g на $\mathscr{P}$ и определения исключительной точки.

Непосредственно из этой теоремы получаем

Следствие 1. *Пусть g — симметричная относительно оси Oz гармоническая функция. Если g_x обращается в нуль на поверхности $\mathscr{P}$, отличной от плоскости $x = 0$, то все точки $\mathscr{P}$ являются исключительными точками отображения ω, осуществляемого градиентом функции g.*

Рассмотрим отображение ω, осуществляемое градиентом гармонической функции g, удовлетворяющей условию (4) в окрестности точки X_0 поверхности $\mathscr{M}$, на которой обращается в нуль гессиан $D(g)$ функции g. Из условия (4) следует, что $\mathscr{M}$ в окрестности точки X_0 является двумерным вещественно-аналитическим многообразием, а линия $\mathscr{L}$ пересечения поверхностей уровня, проходящих через X_0 двух соответствующих компонент градиента g, пересекает $\mathscr{M}$ в точках X_0 так, что касательная к $\mathscr{L}$ не перпендикулярна нормали к $\mathscr{M}$ в точке X_0. Для определенности будем считать, что в точке X_0 имеем $\det E_3(g) \neq 0$. В этом случае кривая $\mathscr{L}$ является пересечением поверхностей уровня g_x и g_y. Кривая $\mathscr{L}$ в точке X_0 переходит с одной стороны $\mathscr{M}$ на другую.

Из условия $\det E_3(g) \neq 0$ следует, что в окрестности точки X_0 из уравнений

$$u = g_x(X), \quad v = g_y(X), \quad \zeta = D(g) \tag{5}$$

переменные x, y и z вполне определенным образом выражаются аналитическими функциями переменных u, v и ζ:

$$x = X(u, v, \zeta), \quad y = Y(u, v, \zeta), \quad z = Z(u, v, \zeta).$$

Подставив найденные значения x, y и z в третье равенство (1), получим, что w является аналитической функцией переменных u, v и ζ, причем в силу того, что $D(g)=0$ в точке X_0, имеем

$$w=w_0(u, v)+\zeta^2 w_1(u, v, \zeta). \tag{6}$$

Из соотношения (6) следует, что при фиксированных u и v функция w принимает одинаковые значения при двух различных значениях ζ, лежащих в окрестности точки X, если $w_1(u, v, 0)\neq 0$. Если же $w_1(u, v, 0)=0$, то найдется натуральное число $n>2$ такое, что

$$w=w_0(u, v)+\zeta^n w_n(u, v, \zeta), \quad w_n(u, v, 0)\neq 0. \tag{7}$$

В зависимости от того, четно или нечетно число n, отображение ω по-разному ведет себя в точке X_0. Если число n нечетно, то легко убедиться в том, что уравнение (7) должно иметь по крайней мере три вещественных корня, обращающихся в нуль при $w=w_0$, ибо в противном случае ω было бы локальным гомеоморфизмом. Поскольку уравнение

$$w=w_0+\zeta^n w_n(u, v, 0)$$

при $w_n\neq 0$ имеет только один вещественный корень, то число n всегда четно.

Отображение ω кривую $\mathscr{L}$ отображает в некоторую прямую l, параллельную оси $u=v=0$, причем ω отображает $\mathscr{L}$ с выброшенной точкой X_0 локально гомеоморфно в l, из которой выброшена точка плоскости $w=0$. Обозначим через $\Omega(X_0)$ настолько малую окрестность точки X_0, что в $\Omega(X_0)$ $D(g)$ обращается в нуль только на $\mathscr{M}$ и всюду на $\mathscr{M}\cap\Omega(X_0)$ выполняется неравенство $\det E_3(g)\neq 0$. Через $\mathscr{L}^+$ обозначим часть $\mathscr{L}$, лежащую в $\Omega(X_0)$ и такую, что на ней $D(g)>0$, а через $\mathscr{L}^-$ обозначим часть $\mathscr{L}\cap\Omega(X_0)$, лежащую в области $D(g)<0$. Так как ω в точке X_0 перестает быть локальным гомеоморфизмом, то оно отображает $\mathscr{L}^+$ и $\mathscr{L}^-$ так, что их образы на прямой l имеют общий отрезок l_0, один из концов которого является образом точки X_0.

Рассмотрим теперь след отображения ω на $\mathscr{M}\cap\Omega(X_0)$. Поскольку на $\mathscr{M}\cap\Omega(X_0)$ нет исключительных точек отображения ω, то следы u_0 и v_0 функций g_x и g_y на $\mathscr{M}$ в силу условия (4) осуществляют локальный гомеоморфизм.

Таким образом, имеем следующую теорему, характеризующую поведение отображения ω в окрестности нулей гессиана функции g.

Теорема 2. *Пусть в окрестности $U(X_0)\subset\mathscr{M}$ точки $X_0\in\mathscr{M}$: $\{D(g)=0\}$ выполняется неравенство* (4). *Для всякой точки $X\in U(X_0)$, исключая, быть может, некоторое вещественно-аналитическое множество $\mathscr{R}$ размерности не выше* 1, *отображение ω действует следующим образом: часть $\Omega^+(X)$ достаточно малой открытой окрестности $\Omega(X)$ точки X, лежащую в области $D(g)>0$, и часть $\Omega^-(X)$, лежащую в области $D(g)<0$, отображает на множества, лежащие по одну сторону образца $\mathscr{M}$, причем образ $\mathscr{M}\cap\Omega(X)$ является общей частью границы образов $\Omega^+(X)$ и $\Omega^-(X)$.*

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
3 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Narasimhan, Analysis on Real and Complex Manifolds, Paris, 1968. [2] H. Lewy, Ann. Math., 88, № 3, 518 (1968). [3] Б. А. Фукс, Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. М., 1962. [4] А. Янушаускас, ДАН, 158, № 3, 547 (1964).