

А. А. АБРАМОВ, А. Н. ГАИПОВА

**О НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЯХ, СОДЕРЖАЩИХ МОНОТОННЫЕ
РАЗРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ**

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 30 I 1973)

Уравнения в гильбертовом пространстве, содержащие монотонные операторы, находят существенное применение при решении задач математической физики (см., например, (1)). При исследовании таких уравнений обычно накладываются ограничения типа гладкости или непрерывности оператора. В настоящей работе для некоторых уравнений с разрывными операторами дается определение решения, доказывается его существование и единственность, дается итеративный всегда сходящийся метод решения. Уже в конечномерном случае соответствующие результаты (они приведены в (2, 3)) неочевидны.

1°. Рассмотрим сначала уравнение

$$f(x)=0, \quad (1)$$

где x, f — элементы вещественного полного гильбертова пространства H . Заданная функция $f(x)$ предполагается удовлетворяющей следующим условиям:

а) $f(x)$ определена на всем H ;

б) $f(x)$ монотонна, т. е. для любых $x, y \in H$ имеет место $(f(x) - f(y), x - y) \geq 0$.

Никаких требований типа гладкости или непрерывности к $f(x)$ не предъявляется.

Определение. Точка c называется решением уравнения (1), если для любого $x \in H$ имеет место

$$(f(x), x - c) \geq 0.$$

Как и для конечномерного H (см. (2)), легко доказывается, что:

1) Если $f(c) = 0$, то c — решение уравнения (1);

2) Если c — решение уравнения (1) и $f(x)$ слабо непрерывна в c по каждому направлению, то $f(c) = 0$;

3) Если $f(x)$ строго монотонна, т. е. для любых $x \neq y$ имеет место $(f(x) - f(y), x - y) > 0$, то уравнение (1) имеет не более одного решения.

2°. Рассмотрим теперь тот случай, когда $f(x) = x + h(x)$, где $h(x)$ монотонна. Очевидно, $f(x)$ строго монотонна. Уравнение примет вид

$$x + h(x) = 0. \quad (2)$$

Совершенно так же, как и для конечномерного H , доказывается

Теорема 1. Пусть c — решение уравнения (2). Пусть x, y, u, v, w таковы, что $y + h(x) = 0$, $u = (x + y)/2$, $v = (x - y)/2$, $w = u - c$.

Тогда

$$(w, w) \leq (v, v).$$

Геометрический смысл этой теоремы следующий. Пусть x — любая точка H . Берем $y = -h(x)$. Тогда решение c (если оно существует) лежит в шаре, для которого x, y — концы диаметра.

Далее будем аппроксимировать уравнение (2) следующим образом. Пусть \hat{H} — какое-либо замкнутое подпространство H , P — оператор ортогонального проектирования H на \hat{H} . Составим в \hat{H} уравнение

$$x + \hat{h}(x) = 0, \quad x \in \hat{H}, \quad (3)$$

где $\hat{h}(x) = Ph(x)$.

Функция $\hat{h}(x)$ монотонна в \hat{H} ; действительно, для любых $x, y \in \hat{H}$ имеем

$$\begin{aligned} (\hat{h}(x) - \hat{h}(y), x - y) &= (Ph(x) - Ph(y), x - y) = \\ &= (h(x) - h(y), P(x - y)) = (h(x) - h(y), x - y) \geq 0. \end{aligned}$$

Если \hat{H} конечномерно, то уравнение (3) имеет решение (см. (3)).

Теорема 2. Пусть $h(x)$ ограничена в H на каждом ограниченном множестве *. Тогда уравнение (2) имеет ровно одно решение.

Доказательство. Единственность решения следует из строгой монотонности функции $x + h(x)$. Для доказательства существования решения дадим процесс последовательных приближений, служащий для построения решения; геометрический смысл этого процесса тот же, что и для конечномерного H (см. (2)). Возьмем любую точку $a \in H$. Вычислим

$$b = -h(a), \quad x_1 = (a + b)/2, \quad r_1 = (a - b, a - b)/4.$$

Далее для $k=1, 2, \dots$ вычисляем

$$\begin{aligned} y_k &= -h(x_k), \\ r_k' &= (y_k - x_k, y_k - x_k)/4, \\ x_{k+1} &= \begin{cases} x_k + \frac{y_k - x_k}{4} \frac{r_k}{r_k'} & \text{при } r_k' \geq \frac{r_k}{2}, \\ (y_k + x_k)/2 & \text{при } r_k' \leq \frac{r_k}{2}, \end{cases} \\ r_{k+1} &= \begin{cases} r_k \left(1 - \frac{r_k}{4r_k'}\right) & \text{при } r_k' \geq \frac{r_k}{2}, \\ r_k' & \text{при } r_k' \leq \frac{r_k}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Очевидно, что $r_1 > r_2 > r_3 > \dots$.

Для каждого натурального N возьмем какое-либо конечномерное подпространство \hat{H}_N , содержащее a, b, x_2, \dots, x_N . Пусть \hat{x}_N — решение уравнения

$$x + \hat{h}(x) = 0, \quad x \in \hat{H}_N. \quad (4)$$

Как уже говорилось, \hat{x}_N существует. В (2) показано, что при $k=1, 2, \dots, N$ справедливо

$$(\hat{x}_N - x_k, \hat{x}_N - x_k) \leq r_k. \quad (5)$$

Поэтому для $m \leq k$ имеем

$$|x_k - x_m| \leq |x_k - \hat{x}_k| + |\hat{x}_k - x_m| \leq \sqrt{r_k} + \sqrt{r_m} \leq 2\sqrt{r_m}. \quad (6)$$

В частности, для всех k справедливо $|x_k - x_1| \leq 2\sqrt{r_1}$. Следовательно, множество всех $x_k, k=1, 2, 3, \dots$, ограничено. Значит, ограничено множество всех y_k и множество всех r_k' ; а тогда, как и в (2), легко получаем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$.

* Если H конечномерно, то выполнимость этого требования следует из монотонности $h(x)$ (см. (2)). Возможно, что в рассматриваемом случае это требование является лишним.

Но из (6) заключаем, что последовательность x_1, x_2, \dots фундаментальная. Следовательно, в силу полноты H существует $c = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$. Из соотношения (5) получаем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{x}_k$ также существует и также равен c независимо от конкретного выбора \hat{H}_k (сами \hat{x}_k , конечно, зависят от выбора \hat{H}_k).

Покажем, наконец, что c — решение уравнения (2). Возьмем любое $u \in H$. В качестве \hat{H} возьмем подпространство, порожденное $u, h(u), a, b, x_2, \dots, x_N$. Так как x_N — решение уравнения (3), а $u, h(u) \in \hat{H}_N$, то $(u+h(u), u-x_N) \geq 0$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем $(u+h(u), u-c) \geq 0$. А это доказывает, в силу произвольности u , что c — решение уравнения (2).

3°. Сформулированный в п. 2° процесс построения приближений является удобным для численной реализации методом приближенного решения уравнения (2). При этом на каждом шаге получается также оценка

$$(x_k - c; x_k - c) \leq r_k.$$

4°. Рассмотрим уравнение

$$Ax + g(x) = 0; \quad (7)$$

здесь A — самосопряженный положительно определенный линейный оператор; его область определения обозначим $D(A)$; область определения оператора \sqrt{A} обозначим $D(\sqrt{A})$. Функция $g(x)$ определена на $D(\sqrt{A})$ и монотонна.

Обычным способом превратим $D(\sqrt{A})$ в вспомогательное полное гильбертово пространство H_A , введя скалярное произведение $[x, y] = (\sqrt{A}x, \sqrt{A}y)$. Уравнение (7) заменим следующим:

$$x + h(x) = 0, \quad x \in H_A, \quad (8)$$

где $h(x) = A^{-1}g(x)$. Легко видеть, что функция $h(x)$ отображает H_A в H_A . Она монотонна в H_A ; действительно,

$$\begin{aligned} [h(x) - h(y), x - y] &= (A(A^{-1}g(x) - A^{-1}g(y)), x - y) = \\ &= (g(x) - g(y), x - y) \geq 0. \end{aligned}$$

Если $h(x)$ ограничена в H_A на каждом ограниченном множестве, то по п. 2° уравнение (8) имеет решение; обозначим его c .

Точка c удовлетворяет условию: для любого $x \in H_A$ имеет место $[x + h(x), x - c] \geq 0$. Но для $x \in D(A)$ справедливо $[x + h(x), x - c] = (Ax + g(x), x - c)$. Поэтому для всех $x \in D(A)$ имеет место $(Ax + g(x), x - c) \geq 0$. Естественно, по аналогии с определением, данным в п. 1°, эту точку c назвать решением уравнения (7); подчеркнем, что $c \in D(\sqrt{A})$, принадлежность c к $D(A)$ не гарантируется теоремой, доказанной в п. 2°.

Последовательные приближения, приведенные в п. 2°, сходятся к c и по норме H , и по норме H_A .

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
22 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ж.-Л. Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., 1972. ² А. А. Абрамов, А. Н. Гаипова, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 12, № 1, 204 (1972). ³ А. А. Абрамов, А. Н. Гаипова, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 12, № 2, 525 (1972).