

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность С. П. Боровлеву и Л. И. Пановой за помощь, оказанную при обработке результатов измерений.

Поступила в Редакцию 23/V 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Г. Игнатьев, И. В. Кирпичников, С. И. Сухоручкин. «Приборы и техника эксперимента», № 4, 25 (1959).
2. К. Г. Игнатьев, И. В. Кирпичников, С. И. Сухоручкин. «Атомная энергия», 16, 114 (1964).
3. E. Vogt. Phys. Rev., 112, 203 (1958).
4. B. Сейлор. В кн. «Материалы Международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1955». Т. 4. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 239.
5. L. Bollinger. Proceedings International Conference on the Neutron Interactions with the Nucleus. N. Y., September 1957.
6. F. Shorge, V. Saigor. Phys. Rev., 112, 191 (1958).
7. E. Vogt. Phys. Rev., 118, 724 (1960).
8. C. Reich, M. Moore. Phys. Rev., 118, 718 (1960).
9. O. Simpson, M. Moore. Phys. Rev., 123, 559 (1961).
10. C. Reich, M. Moore. Phys. Rev., 111, 929 (1958).
11. F. Farley. Nucl. Energy, 3, 33 (1956).
12. D. Huges, R. Schwartz. BNL-325, Suppl., 1960.
13. И. В. Гордеев. «Атомная энергия», 12, 408 (1962).
14. J. Fraser, R. Schwartz. Nucl. Phys., 30, 269 (1962).
15. Дж. Юз. «Атомная энергия», 4, 26 (1958).
16. В. В. Владимирский и др. Там же, 3, 444 (1957).
17. И. В. Кирпичников, С. И. Сухоручкин. Там же, 7, 429 (1959).
18. W. W. Wigner. Proceedings Gatlinburg Conference on Neutron Physics.
19. C. Porter, B. Thomas. Phys. Rev., 104, 483 (1956).
20. Л. Боллингер, Р. Коте, Г. Томас. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Изд. докл. иностр. ученых. Т. 2. М., Атомиздат, 1959, стр. 123.
21. О. Бор. См. [4], т. 2, стр. 175.

УДК 536.125.5.163+539.163

Анализ надежности методов изучения непрерывных спектров быстрых нейтронов и γ -квантов

Г. Г. Дорошенко, В. И. Глаголев, И. Р. Барабанов, И. В. Филишкин

Оценивается физическая надежность методов изучения непрерывных спектров быстрых нейтронов и γ -квантов на основе применения критерия обусловленности систем линейных уравнений. Обсуждаются и сравниваются следующие матричные методы спектрометрии: по форме линии, интегральный и дифференциальный по счетной эффективности. В каждом из этих методов исследуется зависимость обусловленности от формы линии, ранга матрицы, диапазона энергий. Показано преимущество метода счетных эффективностей при плохих формах линии.

Все методы изучения непрерывных спектров быстрых нейтронов и γ -квантов с помощью детекторов, имеющих форму линии, отличную от δ -функции, сводятся к решению систем линейных уравнений. Любая система с определителем, не равным нулю, имеет точное математическое решение. Однако вопрос о физической надежности полученного решения требует особого рассмотрения, поскольку это точное решение может совершенно не отражать физическую реальность. Некоторые исследователи [1, 2] при изучении непрерывных спектров γ -лучей

в диапазоне нескольких десятков мегаэлектрон-вольт обнаруживали на жесткой части спектра осцилляции, которые не имели никакого отношения к изучаемому спектру. Авторы объясняли это неточностью знания форм линий спектрометра при этих энергиях. На самом же деле основная причина этих осцилляций заключается в ухудшении обусловленности системы линейных уравнений вследствие уширения пика полного поглощения. Величина обусловленности [3, 4] является мерой устойчивости решения относительно ошибок в левых и правых частях системы уравнений. В очень плохо обусловленной системе даже ошибки округления при вычислениях могут привести к сильной раскачке решения [3]. Так как в физических измерениях ошибки в левых и правых частях системы неизбежны, вопрос о физической надежности становится первоочередным вопросом при использовании спектрометров с плохой формой линии (например, сцинтилляционные γ -спектрометры с относительно малыми кристаллами NaJ(Tl)).

или же нейтронные спектрометры с органическими сцинтиляторами). В этих случаях осцилляции весьма существенны и могут превосходить измеряемую величину даже при ошибках в аппаратурном спектре $\sim 1\%$. В настоящей работе проводится анализ различных матричных методов изучения непрерывных спектров излучений с точки зрения их надежности.

Каждый из методов характеризуется величиной обусловленности, однозначно связанный с конкретным видом прямой матрицы A , а также точностью применяемой квадратуры. В качестве меры физической надежности решения системы линейных уравнений мы использовали

величину обусловленности $Q = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}$ [4], где

λ_{\max} , λ_{\min} — максимальное и минимальное собственные значения симметрической матрицы $\tilde{A}A$. Поскольку Q можно рассматривать как коэффициент увеличения ошибок в наиболее неблагоприятных случаях [4], то система с $Q > 100$ является непригодной для решения физических задач.

Аппаратурный дифференциальный спектр амплитуд импульсов $F(V)$ связан с дифференциальным энергетическим спектром излучения $f(E)$ интегральным уравнением

$$F(V) = \int_0^\infty f(E) K(V, E) dE, \quad (1)$$

где ядро уравнения $K(V, E)$ является формой линии спектрометра; E — энергия первичного излучения; V — амплитуда импульса напряжения. Все матричные методы связаны с делением шкал как по E , так и по V на конечное число n интервалов. Это логично вытекает из самой сути измерения аппаратурного спектра с помощью многоканального анализатора, так как вследствие конечной ширины каналов анализатора измеряется не $F(V)$, а интеграл от дифференциального аппаратурного спектра в пределах ΔV_i i -го канала:

$$\begin{aligned} \Delta N_i &= \int_{\Delta V_i} F(V) dV = \\ &= \int_{\Delta V_i} dV \int_0^\infty f(E) K(V, E) dE \quad (1 < i < n). \end{aligned} \quad (2)$$

Приближенное решение по матричному методу, основанному на форме линии [1], сводится

к замене (2) системой n линейных уравнений:

$$\Delta N_i \simeq \sum_{k=i}^n f(E_k) \Delta E_k \int_{\Delta V_i} K(V, E_k) dV = \sum_{k=i}^n f_k A_{ik}, \quad (3)$$

где E_k — середины энергетических интервалов ΔE_k , соответствующих амплитудным интервалам ΔV_k . Такая квадратура не является единственно возможной, но так как в матричном методе по форме линии другие замены не известны, мы исследуем на физическую надежность систему (3).

Матричный метод, основанный на счетной эффективности регистрации [5—8], состоит в переходе от интегрального уравнения (1) к системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} N_i &= \int_{B_i}^\infty F(V) dV = \int_0^\infty f(E) dE \int_{B_i}^\infty K(V, E) dV = \\ &= \int_0^\infty f(E) \varepsilon(B_i, E) dE \end{aligned} \quad (4)$$

с последующей заменой интеграла в выражении (4) квадратурой, например по формуле трапеций

$$\begin{aligned} N_i &\simeq \frac{1}{2} \sum_{k=i}^n [f(E_k) \varepsilon(B_i, E_k) + \\ &+ f(E_{k+1}) \varepsilon(B_i, E_{k+1})] \Delta E_k. \end{aligned} \quad (5)$$

В уравнениях (4) и (5) B_i — энергетический порог счетчика; E_k — узловые точки квадратуры.

Система (5) справедлива при использовании интегрального амплитудного анализатора (интегральный вариант метода счетных эффективностей). При использовании дифференциального анализатора левые части в (5) становятся статистически зависимыми, поэтому исследованию на физическую надежность подлежит другая система уравнений, получающаяся из (5) тождественным преобразованием — построчным вычитанием в системе уравнений (5):

$$\begin{aligned} \Delta N_i &= \frac{1}{2} \sum_{k=i}^n [f_k (\varepsilon_{i,k} - \varepsilon_{i+1,k}) + \\ &+ f_{k+1} (\varepsilon_{i,k+1} - \varepsilon_{i+1,k+1})] \Delta E_k. \end{aligned} \quad (6)$$

Систему (6) будем называть дифференциальным вариантом метода счетных эффективностей. Для выяснения влияния на величину обусловленности в каждом из трех вышеперечисленных

матричных методов решения уравнения (1) таких факторов, как форма линии спектрометра, порядок матрицы и величина изучаемого диапазона энергий, мы анализировали величины ϵ для трех форм линий, двух диапазонов энергий и трех порядков матриц. Для упрощения задачи энергетическое разрешение спектрометра считалось идеальным, а шаг матрицы ΔE принимался равномерным. В этом случае узловые точки E_k квадратуры в (5) и (6) можно совместить с энергетическими порогами B_i , тогда уравнения (5) и (6) принимают вид

$$N_i = \sum_{k=i+1}^n f_k \epsilon_{ik} \Delta E = \sum_{k=i+1}^n f_k A_{ik}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta N_i &= \sum_{k=i+1}^n f_k (\epsilon_{ik} - \epsilon_{i+1,k}) \Delta E = \\ &= \sum_{k=i+1}^n f_k \Delta A_{ik} \end{aligned} \quad (8)$$

благодаря тому, что первое и последнее слагаемые в (5) и (6) обращаются в ноль из-за равенства нулю ϵ_{ii} и f_{n+1} соответственно (рис. 1). Легко заметить, что системы уравнений (7) и (8) имеют порядок $(n-1)$, так как $1 \leq i \leq n-1$ и $2 \leq k \leq n$, в то время как система (3) будет иметь порядок n , так как $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq k \leq n$. Анализ обусловленности проведен для трех форм линий, фактически перекрывающих всю область возможных форм линий: 1) с пиком полного поглощения на конце; 2) прямоугольную; 3) треугольную. В таблице приведены элементы матриц для матричного

метода по форме линии и интегрального варианта счетных эффективностей, полученных

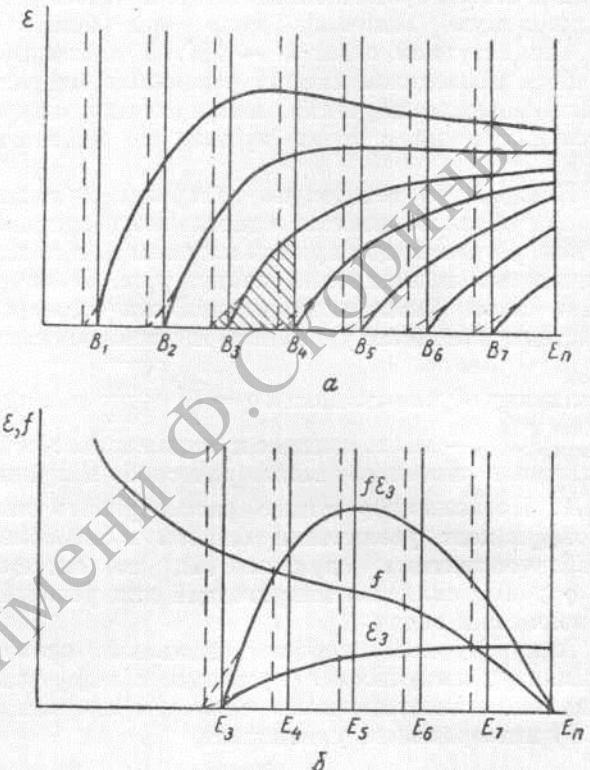


Рис. 1. Энергетическая зависимость счетных эффективностей регистрации ϵ (a) и энергетический спектр и энергетическая зависимость подынтегрального выражения в уравнении (4) для случая $i=3$ (b) при идеальном (—) и конечном (---) разрешениях.

Форма линий и элементы матриц

Номер линии	Форма линии	Элементы матриц	
		матричный метод по форме линии	интегральный вариант счетных эффективностей
1		$A_{ih} = \begin{cases} \frac{\epsilon(E_h) 0,3 \Delta E}{E_h}, & i < k \\ \epsilon(E_h) \left(0,7 + \frac{0,3 \Delta E}{2E_h} \right), & i = k \end{cases}$	$A_{ih} = \epsilon(E_h) \left(1 - 0,3 \frac{B_i}{E_h} \right)$
2		$A_{ih} = \begin{cases} \epsilon(E_h) \frac{\Delta E}{E_h}, & i < k \\ \epsilon(E_h) \frac{\Delta E}{2E_h}, & i = k \end{cases}$	$A_{ih} = \epsilon(E_h) \left(1 - \frac{B_i}{E_h} \right)$
3		$A_{ih} = \begin{cases} \epsilon(E_h) \left(\frac{\Delta E}{E_h} \right)^2, & i < k \\ \epsilon(E_h) \left(\frac{\Delta E}{2E_h} \right)^2, & i = k \end{cases}$	$A_{ih} = \epsilon(E_h) \left(1 - \frac{B_i}{E_h} \right)^2$

ные из уравнений (3) и (7) соответственно. Эффективность регистрации рассчитывалась по формуле

$$\varepsilon(E) = 1 - e^{-\sigma n_0 d}, \quad (9)$$

где $n_0 = 0,0467 \cdot 10^{24} \text{ см}^{-3}$ — число атомов водорода в 1 см³ стильтбена; σ — сечение взаимодействия нейтронов с водородом; d — толщина кристалла, которая выбиралась равной 20, 2 и 0,2 см для трех вышеуказанных форм линий соответственно. Два диапазона энергий (1–11 и 0,5–20,5 Мэв) разбивались на 20, 10 и 5 равномерных интервалов. На рис. 2 приведены результаты анализа зависимости обусловленности Q от метода решения, формы линии, диапазона энергий и числа интервалов n . Видно, что по мере удаления формы линии от идеальной, а также с ростом порядка матрицы и энергетического диапазона обусловленность для всех методов решений ухудшается. Обусловленность в случае первой из рассматриваемых форм линий для методов, основанных на форме линии и счетной эффективности (дифференциальный вариант) одного порядка, очень хорошая и практически не зависит от ранга матрицы. В случае метода счетных эффективностей (интегральный вариант) обусловленность хуже, но вполне приемлема для практических целей. Для прямоугольной формы линии обусловленность матричного метода по форме линии и интегрального метода счетных эффективностей становится одного порядка, причем практическое значение имеют лишь матрицы с порядком не выше восьмого. Дифференциальный метод счетных эффективностей имеет значительно лучшую обусловленность, причем практическое значение имеют все матрицы рассматриваемых порядков. Третья, наиболее неблагоприятная форма линии дает очень плохую обусловленность, причем практическую ценность имеет лишь дифференциальный метод счетных эффективностей для матриц не выше шестого порядка.

Рис. 2 наглядно показывает существенно лучшую обусловленность дифференциального варианта метода счетных эффективностей по сравнению с матричным методом, основанным на форме линии в случае плохих форм линий при прочих равных условиях. Так, для прямоугольной формы линии и для матриц 20-го порядка величина обусловленности в первом случае почти на порядок меньше, чем во втором. Это происходит благодаря характеру нового ядра — счетной эффективности, которая обращается в ноль при $E = B_i$, вследствие

чего диагональные элементы матрицы порядка n обращаются в ноль, т. е. получается матрица $(n-1)$ порядка с относительно большими диагональными элементами. В случае же метода, основанного на форме линии, диагональные элементы матрицы при плохой форме линии оказываются существенно меньше внедиагональных. Конечно, этот факт не ответствен

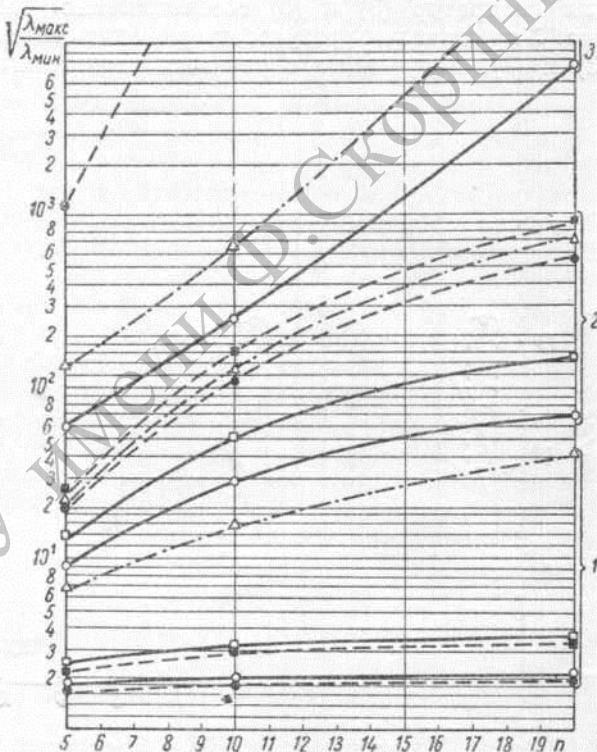


Рис. 2. Зависимость обусловленности от ранга матрицы.

Дифференциальный метод счетных эффективностей для диапазона 1–11 и 0,5–20,5 Мэв (\circ и \square соответственно); интегральный метод счетных эффективностей для диапазона 0,5–20,5 Мэв (\triangle); матричный метод по форме линии для диапазона 1–11 и 0,5–20,5 Мэв (\bullet и \blacksquare соответственно); 1, 2, 3 — обозначение трех форм линий (см. таблицу).

полностью за разницу в обусловленностях, и его надо рассматривать как попытку наглядно объяснить появление этой разницы.

Для проверки влияния обусловленности на надежность решения был проведен следующий расчет. Задавался достаточно сложный спектр — спектр нейтронов Рo — В-источника [9]; эффективность регистрации ($\varepsilon(E) = 1/\sqrt{E}$) и форма линии (прямоугольное распределение с высотой $\varepsilon(E)/E$) брались близкими к реальным. Левые части систем (3) и (8) точно рассчитывались численно по ста точкам заданного спектра.

Точность замены уравнения (1) квадратурами (3) и (8) зависит от вида изучаемого спектра. В данном случае она проверялась сравнением ΔN_i , полученных действием соответствующих прямых матриц на значения спектра в узловых точках с точно рассчитанными ΔN_i по формуле (1). Средние ошибки квадратуры оказались практически одинаковыми, равными 4 и 3,2% для квадратур (3) и (8) соответственно. На рис. 3 представлены результаты решения систем (3) и (8), полученные с точными значениями

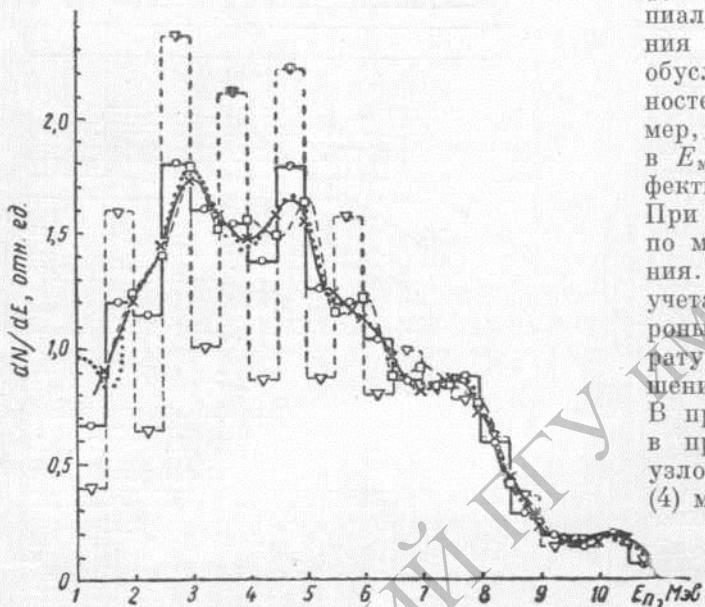


Рис. 3. Расчетный спектр Po - Be-источника:
... — заданный спектр; матричное решение по форме линии и по
счетным эффективностям при точных счетах (\circ и \times соответственно)
и при малой раскачке счетов (∇ и \square соответственно).

ΔN_i и при равномерном знакопеременном изменении точных левых частей от 2% при больших энергиях до 0,1% при малых энергиях. Видно, что в силу лучшей обусловленности системы (8) в обоих случаях дает вполне удовлетворительные результаты, тогда как система (3) из-за плохой обусловленности даже при точно заданных левых частях дает максимальную ошибку приближенного решения, равную 35%. Максимальные отклонения решения от истинного спектра оказываются примерно одного порядка для двух рассматриваемых типов матричного решения в случае, когда раскачка левых частей на порядок больше для лучше обусловленной системы уравнений. Это подтверждает правильность вышеприведенной интерпретации обусловленности как коэффи-

циента увеличения ошибок в левых частях, поскольку величины Q в данном случае отличаются примерно на порядок.

До сих пор мы рассматривали расчетные примеры без учета влияния конечного энергетического разрешения спектрометра. Корректный учет его в матричном методе по форме линии практически невозможен из-за разных аргументов ядра и искомой функции в уравнении (2). В методе счетных эффективностей благодаря одинаковым аргументам ядра и искомой функции (см. уравнение (4) и рис. 1) принципиально возможен корректный учет разрешения спектрометра. Для сохранения хорошей обусловленности в методе счетных эффективностей при учете разрешения можно, например, поместить узлы квадратурной формулы в $E_{min,i}$, соответствующие началу счетных эффективностей (пунктирная линия на рис. 1). При этом обусловленность будет ухудшаться по мере ухудшения энергетического разрешения. Возможен и другой подход к проблеме учета разрешения, связанный, с одной стороны, с некоторым ухудшением точности квадратурной формулы, а с другой стороны, с улучшением обусловленности системы уравнений. В предположении слабого изменения спектра в пределах шага матрицы при совмещении узлов E_k с расположением порогов B , систему (4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} N_i = \int_0^{\infty} f(E) \varepsilon(B_i, E) dE &\simeq \\ &\simeq f_{k+1} \int_0^{E_{i+1}} \varepsilon(B_i, E) dE + \\ &+ \int_{E_{i+1}}^{\infty} f(E) \varepsilon(B_i, E) dE, \end{aligned} \quad (10)$$

где первый интеграл — заштрихованная площадка на рис. 1, б, а второй интеграл опять заменяется квадратурой по формуле трапеций. Для системы 19-го порядка такой учет реального разрешения дал величину обусловленности, равную 51, в то время как при идеальном разрешении эта же система имела обусловленность, равную 68 (см. рис. 2). Такое улучшение обусловленности за счет небольшой погрешности в квадратуре вполне приемлемо, так как на практике имеются другие ошибки (например, статистические, аппаратурные и т. д.), роль которых находится в прямой зависимости от величины Q .

На рис. 4 представлены результаты обработки двумя матричными методами одного и того же аппаратурного спектра, полученного от нейтронов Ро — Ве-источника при использовании кристалла стильбена высотой 20 и диаметром 30 м.м. Целью этого эксперимента являлось не точное измерение спектра нейтронов, а сравнение двух матричных методов обработки при прочих равных условиях. Видно, что при методе счетных эффективностей полу-

ратурного спектра [10, 11] хотя и обладает обусловленностью того же порядка, что и дифференциальный вариант метода счетных эффективностей, однако практически он является мало пригодным из-за больших ошибок приближения [10] и плохого использования информации, поскольку в качестве левых частей здесь фигурируют значения ординат в узловых точках $F(V_i)$, а не интегралы ΔN_i , как это имеет место в матричных методах решения. При относительно плохой обусловленности системы уравнений вышеуказанные причины приводят к сильной раскачке решения и требуется весьма большая тщательность в проведении эксперимента и при обработке результатов, чтобы получить приемлемое решение. Кроме того, метод дифференцирования сводит на нет высокую эффективность регистрации сцинтилляционного детектора из-за требования малых размеров кристалла и больших статистических ошибок в левых частях [10].

В заключение можно рекомендовать применение матричного метода счетных эффективностей для изучения непрерывных спектров быстрых нейтронов и γ -квантов больших энергий.

Авторы выражают благодарность В. Г. Золотухину за интерес к работе и полезные обсуждения.

Поступила в Редакцию 14/VIII 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА*

- J. Hubble. Rev. Scient. Instrum., 29, 65 (1958).
- J. Cockum, N. Starfelt. Nucl. Instrum. and Methods, 4, 171 (1959).
- Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1963.
- К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
- Г. Г. Дорошенко. В сб. «Ядерно-физическая, дозиметрическая и радиометрическая аппаратура». М., Госатомиздат, 1962, стр. 103.
- Г. Г. Дорошенко, А. В. Ларичев. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 27, 146 (1963).
- Г. Г. Дорошенко и др. Neutron Dosimetry (Proceedings of a Symposium on Neutron Detection, Dosimetry and Standardization, Harwell, 10—14 December, 1962.). V. 1. Vienna, International Atomic Energy Agency, 1963, p. 337.
- Г. Г. Дорошенко и др. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 27, 1308 (1963).
- В. Whitmore, W. Baker. Phys. Rev., 78, 799 (1950).
- Н. Вгоек, С. Anderson. Rev. Scient. Instrum., 31, 1063 (1960).
- В. А. Дулин и др. «Приборы и техника эксперимента», № 2, 35 (1961).

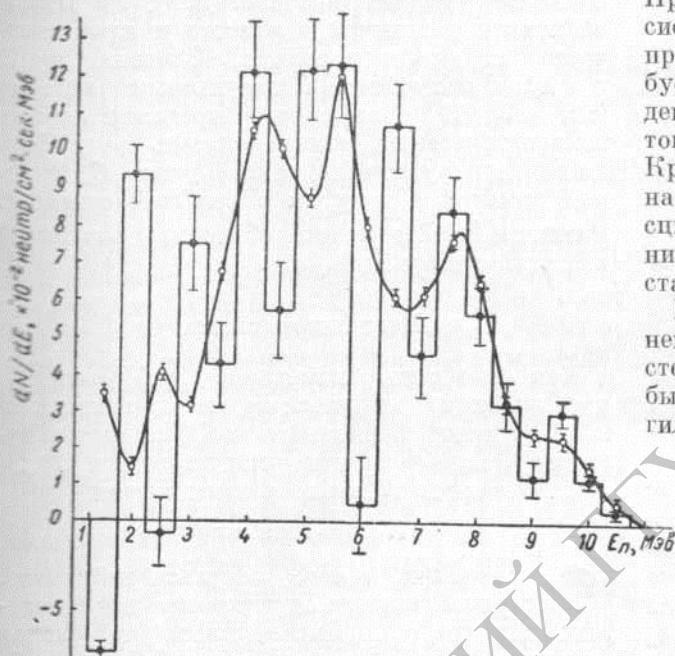


Рис. 4. Спектр Ро — Ве-источника, полученный с кристаллом 20×30 м.м.: \circ — метод счетных эффективностей; \bullet — матричный метод по форме линии. (Показаны только статистические ошибки.)

щается вполне удовлетворительный вид спектра Ро — Ве-источника, тогда как матричный метод, основанный на форме линии, дает значительную раскачку решения, которое становится даже отрицательным. Кроме того, сопоставление точно рассчитанных через обратные матрицы статистических ошибок решения [8] свидетельствует о преимуществе метода счетных эффективностей. Так, при прочих равных условиях статистические ошибки в последнем случае оказываются в семь раз меньше, а следовательно, время набора информации, необходимое для получения заданной статистической ошибки, в 50 раз меньше по сравнению с матричным методом по форме линии.

Используемый сейчас в спектрометрии быстрых нейтронов метод дифференцирования аппа-