Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 2

УДК 519.46 *МАТЕМАТИКА*

И. Л. КАНТОР

ИНВАРИАНТЫ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ СТАЦИОНАРНЫМИ ПОДГРУППАМИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 3 VII 1973)

Двойное отношение четырех точек на проективной прямой является классическим примером инварианта однородного пространства. Другой пример — дифференциальная квадратичная форма, рассматриваемая с точностью до множителя, на конформном пространстве. В заметке находятся инварианты, имитирующие двойное отношение четырех точек и дифференциальную квадратичную форму для широкого класса однородных пространств с параболической стационарной подгруппой. Кроме того, находятся и некоторые другие инварианты.

Схема построения инвариантов следует классическому определению двойного отношения четырех точек на проективной прямой, основанному на фиксировании трех точек, обозначаемых 0, 1, ∞.

1°. Пусть $M=P\setminus G$ — однородное пространство со связной полупростой группой G и стационарной параболической подгруппой P над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Не ограничивая общности, можно считать, что G есть группа внутренних автоморфизмов полупростой алгебры Ли $\mathbf{G}$.

Роль тройки точек 0, 1, ∞ в общем случае играет тройка P, μ, P_-, где P — стационарная (параболическая) подгруппа некоторой точки α_0, P_- — противоположная к P параболическая подгруппа, а μ — так называемый минус-автоморфизм* алгебры $\mathbf{G}$, определяемый такой картановской подалгеброй $\mathbf{T}$, что $e^{\operatorname{ad}\mathbf{T}}\subset P\cap P_-$.

Используя [1, 2], можно доказать следующую лемму.

Лемма. *Пусть P, μ, P_- и P', μ', P_-' — две тройки указанного выше типа; тогда существует единственное преобразование $g\in G$ такое, что*

$$P'=gPg^{-1},\quad \mu'=g\mu g^{-1},\quad P_-'=gP_-g^{-1}. \tag{1}$$

Зафиксируем тройку P, μ, P_-. Рассмотрим представление группы P_- в виде $U_0\cdot U_-$, где $U_0=P\cap P_-$ — редуктивная подгруппа, а U_- — унипотентный нормальный делитель. Известно [1, 2], что отображение $U_-\to M$: $u\to\alpha_0\cdot u$ является вложением U_- в M, причем образ является «большой клеткой» пространства M. Оставшиеся точки образуют некоторое множество $\{\infty\}$. «Выбрасывая» множество $\{\infty\}$, мы отождествляем $M\setminus\{\infty\}$ с многообразием группы U_-. В дальнейшем элемент $u\in U_-$ будем называть *представителем точки* $\alpha_0 u\in M$.

На $M\setminus\{\infty\}$ мы определим четыре функции, которые затем распространим на все пространство M.

Отметим сначала, что задание P и P_- индуцирует представление алгебры Ли $\mathbf{G}$ группы G в виде градуированной алгебры**.

---

* Т. е. автоморфизм, при котором $\mu(\mathbf{x})=-\mathbf{x}$, $\mathbf{x}\in\mathbf{T}$, $\mu\mathbf{e}_\alpha=\mathbf{e}_{-\alpha}$, где $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ — некоторый набор корневых векторов, соответствующих $\mathbf{T}$.

** Не ограничивая общности, можно считать, что P — стандартная, а P_- — канонически ей противоположная параболические подгруппы (см. [2]), задаваемые некоторым набором простых корней θ; тогда $\mathbf{U}_i$ натянуто на корневые векторы $\mathbf{e}_\alpha$ такие, что в разложении α по системе простых корней Δ сумма коэффициентов при θ равна i, $\mathbf{U}_0$ натянуто на корневые векторы $\mathbf{e}_\alpha$ такие, что α есть линейная комбинация корней из θ, и на элементы картановской подалгебры.

$$\mathbf{G}=\mathbf{U}_{-k}+\ldots+\mathbf{U}_{-1}+\mathbf{U}_0+\mathbf{U}_1+\ldots+\mathbf{U}_k, \qquad (2)$$

где $\mathbf{U}_{-k}+\ldots+\mathbf{U}_{-1}+\mathbf{U}_0$ — алгебра Ли группы P_-, $\mathbf{U}_0+\mathbf{U}_1+\ldots+\mathbf{U}_k$ — алгебра Ли группы P, а $\mathbf{U}_-=\mathbf{U}_{-k}+\ldots+\mathbf{U}_{-1}$ — алгебра Ли группы U_-. Заметим, что $\mu(\mathbf{U}_i)=\mathbf{U}_{-i}$.

Для любого $\mathbf{g}\in\mathbf{G}$ имеем

$$\mathbf{g}=(\mathbf{g})_-+(\mathbf{g})', \quad (\mathbf{g})_-\in\mathbf{U}_-, \quad (\mathbf{g})'\in\mathbf{U}_0+\mathbf{U}_1+\ldots+\mathbf{U}_k.$$

Введем в рассмотрение две линейные группы Q и Q^*, действующие на пространстве $\mathbf{U}_-$. Обе группы являются линейными (неточными) представлениями стационарной группы P *

$$Q=\{\dot{p}\,|\,\dot{p}\mathbf{U}_-=(p\mathbf{U}_-)_- \quad \forall p\in P\}, \qquad (3)$$

$$Q^*=\{p^*\,|\,p^*\mathbf{U}_-=\mu p\mu\mathbf{U}_- \quad \forall p\in P\}. \qquad (4)$$

Основную роль в построении определяемых ниже функций играет отображение Ω, ставящее в соответствие каждому элементу $a\in U_-$ линейный оператор $\Omega(a)$ на пространстве $\mathbf{U}_-$:

$$\Omega(a)\mathbf{x}=(a\mu\mathbf{x})_-, \quad \mathbf{x}\in\mathbf{U}_-. \qquad (5)$$

Введем теперь функции на $M\diagdown\{\infty\}$. Значениями этих функций будут некоторые множества линейных операторов, действующих на $\mathbf{U}_-$. Через $a\boxminus b$ ниже обозначается результат правого деления a на b в группе U_-.

Локальное определение. Пусть $a, b, c, d\in U_-$ — представители точек $\alpha, \beta, \gamma, \delta\in M$ при данном выборе групп P и P_- и пусть $\det\Omega(b\boxminus c)\neq 0$, $\det\Omega(a\boxminus d)\neq 0$.

1) Расстоянием между точками α и β назовем

$$\rho(\alpha, \beta)_{P,\mu,P_-}=\{\dot{p}_1\Omega(a\boxminus b)p_2^*\,|\ \forall p_1, p_2\in P\}. \qquad (6)$$

2) Простым отношением трех точек α, β, γ назовем

$$[\alpha, \beta, \gamma]_{P,\mu,P_-}=\{\dot{p}_1\Omega(a\boxminus b)\Omega(c\boxminus b)^{-1}\dot{p}_2\,|\ \forall p_1, p_2\in P\}. \qquad (7)$$

3) Двойным отношением четырех точек $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ назовем

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)_{P,\mu,P_-}=\{\dot{p}\Omega(a\boxminus b)\Omega(c\boxminus b)^{-1}\Omega(c\boxminus d)\quad\Omega(a\boxminus d)^{-1}\dot{p}^{-1}\,|\,\forall p\in P\}. \qquad (8)$$

4) Дифференциальной формой в точке α назовем

$$d\rho(\alpha)_{P,\mu,P_-}(\xi)=\{\dot{p}_1\Omega(a\boxminus e^{\operatorname{ad}\xi t}\boxplus a)p_2^*\}\,(\operatorname{mod} t^k) \quad \forall p_1,\ p_2\in P, \qquad (9)$$

где $k=2$, если в разложении $\Omega(a\boxminus e^{\operatorname{ad}\xi t}\boxplus a)$ по степеням t член при первой степени t не равен нулю, и $k=3$ в противном случае.

Подчеркнем, что все предыдущие построения могут быть проведены для произвольной тройки P', μ', P_-'. Этим мы воспользуемся, чтобы дать следующее

Определение в целом. Пусть f_{P,μ,P_-} —одна из функций

$$\rho(\alpha, \beta)_{P,\mu,P_-}, \quad [\alpha, \beta, \gamma]_{P,\mu,P_-}, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta)_{P,\mu,P_-}, \ d\rho(\alpha)_{P,\mu,P_-}.$$

Обозначим через

$$\rho(\alpha, \beta), \quad [\alpha, \beta, \gamma], \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta), \ d\rho(\alpha) \qquad (10)$$

и будем называть расстоянием, простым отношением, двойным отношением, дифференциальной формой соответст-

---

* Запись $p\mathbf{U}_-$ означает действие автоморфизма p на $\mathbf{U}_-$ (напомним, что элементы группы G являются внутренними автоморфизмами алгебры $\mathbf{G}$).

венно функции, определенные на всем пространстве M следующим образом: пусть P', μ', P_-' — тройка такая, что f_{P',μ',P_-} имеет смысл для данных точек (одной, двух, трех или четырех в зависимости от f). Тогда для этих точек

$$f=g^{-1}f_{P',\mu',P_-'}g,$$

где g однозначно определено соотношением (1).

Теорема 1. *Функции* (10) *определены корректно на всем пространстве M.*

Теорема 2. *Функции* (10) *инвариантны относительно действия на M группы G.*

Замечание. В данном выше определении функций, инвариантных на M, привилегированную роль играет тройка P, μ, P_-. Назовем две функции f и $\tilde{f}$, значения которых суть множества линейных операторов соответственно на пространствах $\mathbf{U}$ и $\tilde{\mathbf{U}}$, изоморфными, если существует такое взаимно однозначное отображение g: $\mathbf{U}\to\tilde{\mathbf{U}}$, что $f=g\tilde{f}g^{-1}$. Легко показать, что функции $\rho(\alpha,\beta)$, $[\alpha,\beta,\gamma]$ и т. д., рассматриваемые с точностью до изоморфизма, не зависят от выбора P, μ, P_-.

2^0. Функции $\rho(\alpha,\beta)$ и $d\rho(\alpha)$ имеют смысл для любого пространства с параболической стационарной подгруппой. Две другие функции $[\alpha,\beta,\gamma]$ и $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ имеют смысл лишь в том случае, когда $\det\Omega(a)\neq0$. Дадим критерий того, когда выполняется это условие. Назовем пространство $M=P\setminus G$ самосопряженным, если подгруппы P и P_- сопряжены.

Теорема 3. $\det\Omega(a)\neq0$ *тогда и только тогда, когда пространство M является самосопряженным.*

В [2] показано, что пространство самосопряжено тогда и только тогда, когда $i(\theta)=\theta$, где θ — набор простых корней, определяющий стандартную параболическую подгруппу P, а i — инволюция противопоставления. В частности, когда $G=B_n$, C_n, D_{2n}, G_2, F_4, E_7, E_8, пространство M самосопряжено для любого P, так как i — тривиальное отображение.

3^0. Пусть в разложении (2) $k>1$. Теоремы 1—3 могут быть тогда обобщены; при этом возникают новые инварианты, которые, вообще говоря, вычисляются легче.

Положим $\mathbf{E}_{-l}=\mathbf{U}_{-l}\dotplus\mathbf{U}_{-l-1}\dotplus\ldots\dotplus\mathbf{U}_{-k}$. Для каждого $\mathbf{g}\in\mathbf{G}$ имеем

$$\mathbf{g}=(\mathbf{g})_{-l}+(\mathbf{g})^{(l)},\quad (\mathbf{g})_{-l}\in\mathbf{E}_{-l},\quad \mathbf{g}^{(l)}\in\mathbf{U}_k\dotplus\ldots\dotplus\mathbf{U}_0\dotplus\ldots\dotplus\mathbf{U}_{-l+1}.$$

По аналогии с (3)—(5) введем ${}^lQ$, ${}^lQ^*$ и ${}^l\Omega(a)$, при этом линейные преобразования будут действовать не на $\mathbf{U}_-$, а на $\mathbf{E}_{-l}$:

$${}^lQ=\{{}^l\dot{p}\,|\,{}^l\dot{p}\mathbf{E}_{-l}=(p\mathbf{E}_{-l})_{-l}\quad \forall p\in P\},\tag{11}$$

$${}^lQ^*=\{{}^lp^*\,|\,{}^lp^*\mathbf{E}_{-l}=\mu p\mu\mathbf{E}_{-l}\quad \forall p\in P\},\tag{12}$$

$${}^l\Omega:\ a\to{}^l\Omega(a)\quad \forall a\in\mathbf{U}_-,\quad {}^l\Omega(a)\mathbf{x}=(a\mu\mathbf{x})_{-l},\quad \mathbf{x}\in\mathbf{E}_{-l}.\tag{13}$$

Для $1\leqslant l\leqslant k$ назовем l-расстоянием, l-простым отношением, l-двойным отношением, l-дифференциальной формой и обозначим соответственно через

$${}^l\rho(\alpha,\beta),\quad {}^l[\alpha,\beta,\gamma],\quad {}^l(\alpha,\beta,\gamma,\delta),\quad {}^ld\rho(\alpha)\tag{14}$$

функции, которые возникают, если в данных выше определениях (локальном и в целом) заменить всюду проектирование $\mathbf{g}\to(\mathbf{g})_-$ проектированием $\mathbf{g}\to(\mathbf{g})_{-l}$ и тем самым заменить $\dot{p}$, p^*, Q, Q^*, $\Omega(a)$ на ${}^l\dot{p}$, ${}^lp^*$, ${}^lQ$, ${}^lQ^*$, ${}^l\Omega(a)$ (при $l=1$ (10) и (14) совпадают).

Теорема 4. *Функции* (14) *определены корректно на всем M и инвариантны относительно G.*

Назовем пространство M l-самосопряженным, если для набора простых корней θ, определяющего M, справедливо

$$i\cdot[\Delta\setminus\theta]_l=[\Delta\setminus\theta]_l,$$

где i — инволюция противопоставления, а через $[\Delta\setminus\theta]_l$ обозначено множество положительных корней α таких, что в разложении α по простым корням сумма коэффициентов при $\Delta\setminus\theta$ больше или равна l.

Отметим, что из l-самосопряженности вытекает m-самосопряженность для любого $m\geqslant l$ и что 1-самосопряженность совпадает с самосопряженностью.

Теорема 5. $\det{}^l\Omega(a)\neq 0$ *тогда и только тогда, когда пространство* M *является* l*-самосопряженным.*

4°. Обозначим через $\mathrm{Aut}_\theta G$ группу $\mathrm{Aut}_\theta D\cdot G$, где $\mathrm{Aut}_\theta D$ — группа автоморфизмов диаграммы Дынкина D алгебры G, сохраняющих θ. Группа $\mathrm{Aut}_\theta G$ естественным образом действует на M. Заметим, что ограничение любого преобразования из M на U_- является рациональным преобразованием.

Вместо функции ${}^l(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ можно рассмотреть ее определитель, равный

$$\frac{\det{}^l\Omega(a\boxminus b)}{\det{}^l\Omega(c\boxminus b)}:\frac{\det{}^l\Omega(a\boxminus d)}{\det{}^l\Omega(c\boxminus d)}. \tag{15}$$

Теорема 6. *Группа всех рациональных преобразований* U_-, *сохраняющих* (15), *является группой* $\mathrm{Aut}_\theta G$.

5°. Впервые примеры инвариантов типа двойного отношения рассматривались Хуа Ло-геном для многих важных случаев [9–11]. Эти примеры отвечают алгебрам (3) при $k=1$: $G=U_{-1}+U_0+U_1$. Алгебры Ли такого вида рассматривались автором [4, 6], установившим, что в этом случае U_- отождествляется с пространством некоторой йордановой алгебры. Двойное отношение на пространстве йордановой алгебры, совпадающее с (16), рассматривалось автором в [5, 7, 8]. Двойное отношение, совпадающее с (9) на пространстве йордановой алгебры, рассматривалось Е. Браун [3].

Для случая $k>1$ инварианты (10), (14) указаны, по-видимому, впервые. В частности, случай $k>1$ позволяет представить (многими способами) все особые группы Ли как группы, сохраняющие «двойное отношение». За неимением места приведем лишь простой пример для классической группы C_n. Возьмем $\theta=\Delta\setminus\alpha_1$, где Δ — совокупность простых корней, $l=2$. В этом случае U состоит из пар $a=(a_1, a_2)$, где a_1 — элемент $2n$-мерного векторного пространства с заданной невырожденной кососимметрической формой $\langle a_1, b_1\rangle$, а a_2 — число. Инвариантная дифференциальная форма есть известная дифференциальная форма Картана ${}^2d\rho(a)=\langle a_1, da_1\rangle+da_2$, а двойное отношение ${}^2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ четырех точек есть число вида (16), причем $\det{}^2\Omega(a\boxminus b)=\langle a_1, b_1\rangle+a_2-b_2$.

Всесоюзный заочный
финансово-экономический институт
Москва

Поступило
22 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Борель*, Линейные алгебраические группы, М., 1972. [2] *А. Борель, Ж. Тите*, Сборн. пер. Математика, т. 11, в. 1, 43, т. 11, в. 2, 3 (1967). [3] *H. Braun*, Abh. Math. Univ. Hamburg, B. 32, № 1–2, 25 (1968). [4] *И. Л. Кантор*, ДАН, т. 158, № 6, 1271 (1964). [5] *И. Л. Кантор*, Тез. докл. на Международн. математич. конгрессе, М., 1966. [6] *И. Л. Кантор*, Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, в. 13, стр. 310 (1966). [7] *И. Л. Кантор*, ДАН, т. 172, № 4, 779 (1967). [8] *И. Л. Кантор*, Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, в. 14, 114 (1968). [9] *Хуа Ло-ген*, ДАН, т. 53, № 2, 99 (1946). [10] *Hua Loo-keng*, Trans. Am. Math. Soc., v. 57, 441 (1945). [11] *Hua Loo-keng*, ibid., v. 61, № 2, 229 (1947). [12] *Hua Loo-keng*, Ann. Math., v. 50, Ser. 2, № 1, 8 (1949).