Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 6

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

В. В. ПЕТРОВ

О РОСТЕ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

(Представлено академиком Ю. В. Линником 8 II 1972)

1. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{X_n;\ n=1,2,\ldots\}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ и неубывающую числовую последовательность $\{a_n;\ n=1,2,\ldots\}$ такую, что

$$a_n \to \infty, \quad a_{n+1}/a_n \to 1. \tag{1}$$

Положим $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

(A) *существует постоянная* $p > 1/2$ *такая, что* $P(|S_n| \leqslant \varepsilon a_n) \geqslant p$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *и всех достаточно больших* n;

(B) *существует постоянная* $\beta > 0$ *такая, что*

$$\limsup_{n\to\infty} P(S_n \geqslant x a_n)(\log a_n)^{(1-\delta)x} < \infty$$

для любого $\delta > 0$ *и любого* $x \in (1, 1+\beta)$.

Тогда

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{a_n}\right) \leqslant 1 \quad \textit{п. н.} \quad * \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (B) *с заменой в нем суммы* S_n на $|S_n|$. *Если выполнены условия* (A) *и*

(C) $\liminf_{n\to\infty} P(S_n \geqslant x a_n)(\log a_n)^{(1+\delta)x} > 0$ *для любого* $\delta > 0$ *и любого* $x \in (1-\beta, 1)$, *то*

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{a_n}\right) = 1 \quad \textit{п. н.} \tag{3}$$

Если существует такая последовательность положительных чисел $\{b_n\}$, что распределение нормированной суммы S_n/b_n слабо сходится при $n\to\infty$ к некоторому предельному распределению, то условие (A) выполнено для любой последовательности $\{a_n\}$, удовлетворяющей условию $a_n/b_n \to \infty$.

Следствием теоремы 2 является теорема автора [1], согласно которой имеет место соотношение

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{b_n(2\log\log b_n)^{1/2}} = 1 \quad \text{п. н.},$$

если неубывающая числовая последовательность $\{b_n\}$ удовлетворяет условиям $b_n \to \infty$, $b_{n+1}/b_n \to 1$ и

$$\sup_x \left| P(S_n < b_n x) - (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du \right| = O\left((\log b_n)^{-1-t}\right)$$

для некоторого $t > 0$. Действительно, при выполнении этих условий будут выполнены условия (A), (B) для $\beta = (1+t)^{1/2} - 1$ и (C) для любого положительного $\beta < 1$, если положить $a_n = b_n(2\log\log a_n)^{1/2}$.

* П. н. означает «почти наверное».

Из теорем 1 и 2 вытекают результаты Томкинса [2] о законе повторного логарифма для последовательности независимых случайных величин, обладающих конечными дисперсиями. Отметим еще одно следствие теоремы 1.

Следствие. *Пусть выполнены условия* (A) *и* (B) *с одновременной заменой в последнем условии* S_n *на* $|S_n|$ *и* a_n *на* εa_n *для любого* $\varepsilon > 0$. *Тогда* $S_n / a_n \to 0$ *п.н.*

В свою очередь, отсюда с помощью одной теоремы Хейди [3] можно получить следующее предложение. Если $\{X_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения, принадлежащей области нормального притяжения неодностороннего устойчивого закона с показателем α, $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, причем $EX_1 = 0$ в случае $\alpha > 1$, то $n^{-1/\alpha}(\log n)^{-(1+\varepsilon)/\alpha} S_n \to 0$ п.н. для любого $\varepsilon > 0$. Это предложение можно доказать также иным способом с помощью другой теоремы Хейди [4].

2. Перейдем к доказательству теоремы 1. Для (2) достаточно доказать, что $P(S_n > (1+\varepsilon)a_n$ б.ч.$^*) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Из условия (1) следует, что для любого $\tau > 0$ существует неубывающая последовательность целых положительных чисел $\{n_k\}$ такая, что $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$ и $a_{n_k-1} \leqslant (1+\tau)^k < a_{n_k}$. В силу (1) имеем

$$a_{n_k} \sim (1+\tau)^k, \quad a_{n_k} - a_{n_{k-1}} \backsim a_{n_k} \frac{\tau}{1+\tau} \tag{4}$$

при $k \to \infty$. Положим $\bar{S}_n = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} S_n$ и покажем, что

$$\sum_k P(\bar{S}_{n_k} > (1+\gamma) a_{n_k}) < \infty \tag{5}$$

для любого $\gamma > 0$. Пусть ε — произвольное положительное число. Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} P(S_n - S_j \geqslant -2\varepsilon a_n) &\geqslant P([S_n \geqslant -\varepsilon a_n] \cap [S_j \leqslant \varepsilon a_n]) \geqslant \\ &\geqslant P(S_n \geqslant -\varepsilon a_n) - P(S_j > \varepsilon a_n) \end{aligned} \tag{6}$$

для любых n и $j < n$. Из условия (A) и предположения о неубывании последовательности $\{a_n\}$ следует, что $P(S_j > \varepsilon a_n) \leqslant P(S_j > \varepsilon a_j) \leqslant 1 - p$ для $N \leqslant j \leqslant n$ и некоторого N. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $p < 1$. Если $j < N$, то $P(S_j > \varepsilon a_n) \leqslant 1 - p$ для достаточно больших n, ибо $a_n \to \infty$. Учитывая (6), получаем $P(S_n - S_j \geqslant -2\varepsilon a_n) \geqslant \lambda$ для $j < n$ и достаточно больших n, где $\lambda = 2p - 1 > 0$. Воспользуемся теперь следующим предложением.

Лемма. *Пусть* $X_1, \ldots, X_n$ — *взаимно независимые случайные величины. Если*

$$P(S_n - S_j \geqslant -b) \geqslant c, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

для некоторых $b \geqslant 0$ *и* $c > 0$, *то*

$$P(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant x) \leqslant \frac{1}{c} P(S_n \geqslant x - b)$$

для любого x.

Доказательство этой леммы проводится так же, как в [1], где был рассмотрен случай $c = 1/2$. В силу леммы имеем

$$\begin{aligned} P(\bar{S}_{n_k} > (1+\gamma) a_{n_k}) &\leqslant \frac{1}{\lambda} P(S_{n_k} \geqslant (1+\gamma) a_{n_k} - 2\varepsilon a_{n_k}) \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda} P(S_{n_k} \geqslant (1+\gamma_1) a_{n_k}) \end{aligned} \tag{7}$$

---

* Запись «б. ч.» означает «бесконечное число раз».

для любой положительной постоянной $\gamma_1 < \gamma$ и всех достаточно больших k, если взять достаточно малое $\varepsilon > 0$. Для оценки правой части (7) используем условие (B) и первое из соотношений (4). Выбрав положительные постоянные γ_1 и δ достаточно малыми, получим

$$\sum_k P(S_{n_k} \geqslant (1+\gamma_1) a_{n_k}) \leqslant C \sum_k (k \log(1+\tau))^{-(1-\delta)(1+\gamma_1)} < \infty.$$

Здесь C — некоторая положительная постоянная. Отсюда и из (7) вытекает (5).

Далее,

$$P(S_n > (1+\varepsilon) a_n \text{ б. ч.}) \leqslant P(\max_{n_{k-1} < n \leqslant n_k} S_n > (1+\varepsilon) a_{n_{k-1}} \text{ б. ч.}) \leqslant$$
$$\leqslant P(\bar{S}_{n_k} > (1+\varepsilon) a_{n_{k-1}} \text{ б. ч.}) \qquad (8)$$

В силу (4) имеем $a_{n_k} < (1+2\tau) a_{n_{k-1}}$ для любого $\tau > 0$ и достаточно больших k. Пусть ε — произвольное положительное число, а $\gamma > 0$ и $\tau > 0$ удовлетворяют условию $(1+\gamma)(1+2\tau) < 1+\varepsilon$. Тогда из (8) следует, что

$$P(S_n > (1+\varepsilon) a_n \text{ б. ч.}) \leqslant P(\bar{S}_{n_k} > (1+\gamma) a_{n_k} \text{ б. ч.}).$$

Последняя вероятность равна нулю в силу (5) и леммы Бореля — Кантелли. Теорема 1 доказана.

3. Докажем теперь теорему 2. Вследствие теоремы 1 достаточно доказать, что $P(S_n > (1-\varepsilon) a_n \text{ б.ч.}) = 1$ для любого $\varepsilon > 0$. Рассмотрим определенную в п. 2 последовательность $\{n_k\}$ и положим $b_k = a_{n_k} - a_{n_{k-1}}$. В силу (4) имеем $b_k \backsim \tau a_{n_{k-1}}$ при $k \to \infty$.

Для $0 < \gamma < 1$ и достаточно больших k получаем

$$P(S_{n_k} - S_{n_{k-1}} > (1-\gamma) b_k) \geqslant P(S_{n_k} > (1 - {}^1/_2\gamma) b_k) - P(S_{n_{k-1}} \geqslant {}^1/_2\gamma b_k) \geqslant$$
$$\geqslant P(S_{n_k} > (1 - {}^1/_2\gamma) a_{n_k}) - P(S_{n_{k-1}} \geqslant {}^1/_4\gamma\tau a_{n_{k-1}}). \qquad (9)$$

Пусть γ — произвольная положительная постоянная, β — постоянная из условий (B) и (C). Выберем τ так, чтобы выполнялось неравенство ${}^1/_4\gamma\tau > 1 + {}^1/_2\beta$. Тогда из (B), (C) и (4) получим

$$P(S_{n_{k-1}} \geqslant {}^1/_4\gamma\tau a_{n_{k-1}}) \leqslant c_1 (k-1)^{-(1-\delta)(1+{}^1/_2\beta)},$$
$$P(S_{n_k} > (1 - {}^1/_2\gamma) a_{n_k}) \geqslant c_2 k^{-(1+\delta)(1-{}^1/_2\gamma)}$$

для достаточно малого $\gamma > 0$, любого $\delta > 0$ и всех достаточно больших k. Здесь c_1 и c_2 — некоторые положительные постоянные. Выберем δ удовлетворяющим условиям $(1+\delta)(1-{}^1/_2\gamma) < 1$ и $(1-\delta)(1+{}^1/_2\beta) > 1$. Вследствие (9) имеем

$$\sum_k P(S_{n_k} - S_{n_{k-1}} > (1-\gamma) b_k) = \infty$$

для любого положительного γ. Поэтому

$$P(S_{n_k} - S_{n_{k-1}} > (1-\gamma) b_k \text{ б. ч.}) = 1$$

по лемме Бореля — Кантелли. Далее

$$(1-\gamma) b_k - 2a_{n_{k-1}} \backsim ((1-\gamma)\tau - 2) a_{n_{k-1}} \sim \frac{(1-\gamma)\tau - 2}{1+\tau} a_{n_k}$$

при $k \to \infty$. В силу теоремы 1 имеем $|S_n(\omega)| \leqslant 2a_n$ для $n > n_0(\omega)$ и всех точек $\omega \in \Omega$, за исключением множества нулевой вероятностной меры.

По произвольно заданному $\varepsilon > 0$ выберем $\gamma > 0$ и $\tau > 0$ так, чтобы имело место неравенство $(1-\gamma)\tau - 2 > (1-\varepsilon)(1+\tau)$. Тогда

$$P(S_{n_k} > (1-\varepsilon)a_{n_k} \text{ б. ч.}) \geqslant P(S_{n_k} > (1-\gamma)b_k - 2a_{n_{k-1}} \text{ б. ч.}) \geqslant$$
$$\geqslant P(S_{n_k} - S_{n_{k-1}} > (1-\gamma)b_k \text{ б. ч.}) = 1.$$

Утверждение (3) доказано.

4. Теорема 1 сохраняет силу, если в ней заменить условие (В) более слабым условием существования такой постоянной $\beta > 0$, что

$$\limsup_{n\to\infty} P(S_n \geqslant x a_n) \log a_n (\log\log a_n)^{(1-\delta)x} < \infty$$

для любого $\delta > 0$ и любого $x \in (1, 1+\beta)$. Подобно этому, в условии (С) теоремы 2 можно заменить $(\log a_n)^{(1+\delta)x}$ на $\log a_n (\log\log a_n)^{(1+\delta)x}$.

Приношу глубокую благодарность В. А. Егорову за обсуждение работы и полезные замечания.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
3 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Петров, Теория вероятн. и ее применения, **16**, № 4, 715 (1971). [2] R. J. Tomkins, Trans. Am. Math. Soc., **156**, 185 (1971). [3] C. C. Heyde, Sankhya, **A30**, № 3, 253 (1968). [4] C. C. Heyde, Proc. Am. Math. Soc., **23**, № 1, 85 (1969).