Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 4

УДК 517.53 : 517.55

МАТЕМАТИКА

И. И. БАВРИН

ОПЕРАТОРЫ В ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 20 VII 1973)

В настоящей статье вводятся интегродифференциальные операторы, специфические для класса выпуклых (1) областей пространства C^n, и дается применение этих операторов в теории интегральных представлений голоморфных функций.

1. Пусть D — выпуклая область в пространстве C^n комплексных переменных z_ν, $\nu=1,\ldots,n$, $n\geqslant 1$, и функция $f=f(z_1,\ldots,z_n)$ голоморфна в D. Пусть m, $\widetilde{m}$ — натуральные числа, $\beta_1,\ldots,\beta_m$, $\widetilde{\beta}_1,\ldots,\widetilde{\beta}_{\widetilde{m}}$ — любые положительные числа с условием $\beta_j, \widetilde{\beta}_{\widetilde{j}}\geqslant 1$ $(j=1,\ldots,m;\ \widetilde{j}=1,\ldots,\widetilde{m})$ и $z^{(1)}=$ $=z_1^{(1)},\ldots,z_n^{(1)}$ $z^{(m)}=(z_1^{(m)},\ldots,z_n^{(m)})$, $\widetilde{z}^{(1)}=(\widetilde{z}_1^{(1)},\ldots,\widetilde{z}_n^{(1)}),\ldots,\widetilde{z}^{(\widetilde{m})}=(\widetilde{z}_1^{(\widetilde{m})},\ldots,\widetilde{z}_n^{(\widetilde{m})})$ — фиксированные по произволу точки из области D. Введем обозначения:

$$L_{\beta_j;z^{(j)}}[f]=\beta_j f+\sum_{\nu=1}^{n}(z_\nu-z_\nu^{(j)})f'_{z_\nu},\quad j=1,\ldots,m,$$

$$L_{ab}^{(m)}[f]=L^{(m)}_{(\beta_1,\ldots,\beta_m)(z^{(1)},\ldots,z^{(m)})}[f]=L_{\beta_m;z^{(m)}}[L_{\beta_{m-1};z^{(m-1)}}\ldots[L_{\beta_1;z^{(1)}}[f]]\ldots]^*,$$

$$L^{(-1)}_{\beta_j;z^{(j)}}[f]=\int_0^1\varepsilon^{\beta_j-1}f(\varepsilon z_1+(1-\varepsilon)z_1^{(j)},\ldots,\varepsilon z_n+(1-\varepsilon)z_n^{(j)})\,d\varepsilon,\quad j=1,\ldots,m,$$

$$L_{ab}^{(-m)}[f]=L^{(-1)}_{\beta_1;z^{(1)}}[L^{(-1)}_{\beta_2;z^{(2)}}\ldots[L^{(-1)}_{\beta_m;z^{(m)}}[f]]\ldots]$$

и положим

$$L_{ab}^{(0)}[f]=f.$$

Справедливы формулы

$$f(z_1,\ldots,z_n)=\int_0^1\varepsilon^{\beta_j-1}L_{\beta_j;z^{(j)}}[f(\varepsilon z_1+(1-\varepsilon)z_1^{(j)},\ldots,\varepsilon z_n+(1-\varepsilon)z_n^{(j)})]\,d\varepsilon \quad (1)$$

(ε вещественно), $j=1,\ldots,m$.

С помощью этих формул устанавливается, что операторы $L_{\beta_j;z^{(j)}}[f]$ и $L^{(-1)}_{\beta_j;z^{(j)}}[f]$ взаимно обратны. Отсюда следует, что взаимно обратны и операторы $L_{ab}^{(m)}[f]$ и $L_{ab}^{(-m)}[f]$.

Аналогично взаимно обратны операторы $L_{\widetilde{a}\widetilde{b}}^{(\widetilde{m})}[f]$ и $L_{\widetilde{a}\widetilde{b}}^{(-\widetilde{m})}[f]$ **.

---

* Здесь и везде в дальнейшем $a=(\beta_1,\ldots,\beta_m)$, $b=(z^{(1)},\ldots,z^{(m)})$.

** Здесь и всюду ниже $\widetilde{a}=(\widetilde{\beta}_1,\ldots,\widetilde{\beta}_{\widetilde{m}})$, $\widetilde{b}=(\widetilde{z}^{(1)},\ldots,\widetilde{z}^{(\widetilde{m})})$.

Пусть теперь m, $\widetilde{m}$ — целые неотрицательные числа. Введем обозначения (как и прежде, f голоморфна в D):

$$L_{ab\tilde{a}\tilde{b}}^{(m,\,-\widetilde{m})}[f] = L_{\tilde{a}\tilde{b}}^{(-\widetilde{m})}[L_{ab}^{(m)}[f]],$$

$$L_{\tilde{a}\tilde{b}ab}^{(\widetilde{m},\,-m)}[f] = L_{ab}^{(-m)}[L_{\tilde{a}\tilde{b}}^{(\widetilde{m})}[f]].$$

Нетрудно видеть, что эти два оператора взаимно обратны.

2. Пусть D — ограниченная выпуклая область в пространстве C^1, причем граница этой области — замкнутая кусочно-гладкая кривая Γ. Пусть далее $z^{(1)}, \ldots z^{(m)}$, $\tilde{z}^{(1)}, \ldots, \tilde{z}^{(\widetilde{m})}$ — фиксированные по произволу точки из области D.

Теорема 1. *Если голоморфная в области D функция $f(z)$ и все ее производные до порядка μ, $\mu=0, 1, 2, \ldots$, включительно непрерывны в замкнутой области $\bar{D}$, то для $m=0, 1, \ldots, \mu$; $\widetilde{m}=0, 1, 2, \ldots$; $z\in D$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} L_{\tilde{a}\tilde{b}ab}^{(\widetilde{m},\,-m)}\left[\frac{1}{\zeta - z}\right] L_{ab\tilde{a}\tilde{b}}^{(m,\,-\widetilde{m})}[f(\zeta)]\,d\zeta, \tag{2}$$

где интегрирование совершается по контуру Γ в положительном направлении.

Формула (2) выражает значения функции $f(z)$ в области D через значения интегродифференциального оператора $L_{ab\tilde{a}\tilde{b}}^{(m,\,-\widetilde{m})}[f]$ на границе области $\bar{D}$.

При доказательстве используются свойства введенных операторов и формула Коши.

Замечание 1. При $m=0$, $\tilde{a}=(1, 2, \ldots, \widetilde{m})$

$$L_{\tilde{a}\tilde{b}ab}^{(\widetilde{m},\,-m)}\left[\frac{1}{\zeta - z}\right] = \widetilde{m}!\,(\zeta - z)^{-\widetilde{m}-1}\prod_{j=1}^{\widetilde{m}}(\zeta - \tilde{z}^{(j)}).$$

3. Подобно интегральной формуле Коши с помощью введенных операторов обобщается и ряд интегральных представлений * в случае n, $n\geqslant 2$, комплексных переменных. Укажем на одно такое обобщение. Пусть область $D=\{(z_1, \ldots, z_n):\ \Phi(z_1,\ \bar{z}_1, \ldots, z_n,\ \bar{z}_n)<0\}$, содержащая точку $(0, \ldots, 0)$, выпукла и ограничена, а функция Φ дважды непрерывно дифференцируема и все производные первого порядка от Φ не обращаются одновременно в 0 в точках границы ∂D области D. Пусть $z^{(1)} = (z_1^{(1)}, \ldots, z_n^{(1)}), \ldots, z^{(m)} = (z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}), \ldots, \tilde{z}^{(1)} = (\tilde{z}_1^{(1)}, \ldots, \tilde{z}_n^{(1)}), \ldots, \tilde{z}^{(\widetilde{m})} = (\tilde{z}_1^{(\widetilde{m})}, \ldots, \tilde{z}_n^{(\widetilde{m})})$ — фиксированные по произволу точки из области D

Теорема 2. *Если голоморфная в области D функция $f(z)$, $z=(z_1, \ldots, z_n)$, и все ее частные производные до порядка μ, $\mu=0, 1, 2, \ldots$, включительно непрерывны в замкнутой области $\bar{D}$, то для $m=0, 1, \ldots, \mu$; $\widetilde{m}=0, 1, 2, \ldots$; $z\in D$*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D}\lambda^{1-n}L_{1,\,n-1}^{(n-1)}\left[L_{\tilde{a}\tilde{b}ab}^{(\widetilde{m},\,-m)}\left[\Big(\sum_{l=1}^{n}(\zeta_l - z_l)\Phi'_{\zeta_l}\Big)^{-1}\right]\right] \times$$

$$\times\ L_{ab\tilde{a}\tilde{b}}^{(m,\,-\widetilde{m})}[f(\zeta)]\sum_{l=1}^{n}\zeta[l]\,d\bar{\zeta}[l]\wedge d\zeta\ {**}.$$

---

* Например, ряд интегральных представлений из ([1–6]).

** Пояснения к обозначениям см. в ([7]).

З а м е ч а н и е 2. При $m=n-1$, $z^{(j)}=(0,\ldots,0)$, $j=1,\ldots,m$, $\tilde{a}=(1,2,\ldots$ $\ldots,\tilde{m})$

$$L^{(n-1)}_{1,\,n-1}\left[L^{(\tilde{m},\,-m)}_{\tilde{a}\tilde{b}ab}\left[\left(\sum_{l=1}^{n}(\zeta_l-z_l)\Phi'_{\zeta_l}\right)^{-1}\right]\right]=$$

$$=\tilde{m}!\left(\sum_{l=1}^{n}(\zeta_l-z_l)\Phi'_{\zeta_l}\right)^{-\tilde{m}-1}\prod_{\tilde{j}=1}^{\tilde{m}}\sum_{l=1}^{n}(\zeta_l-z_l^{(\tilde{j})})\Phi'_{\zeta_l}.$$

4. Формула (1) остается в силе и в том случае, когда β_j — любое положительное число. Но при $0<\beta_j<1$ интеграл, входящий в эту формулу, надо понимать как несобственный. С учетом такого же замечания по поводу аналогичных интегралов все результаты этой заметки, связанные с $\beta_1,\ldots$ $\ldots,\beta_m$, $\tilde{\beta}_1,\ldots,\tilde{\beta}_{\tilde{m}}$, остаются в силе и в случае, когда $\beta_1,\ldots,\beta_m$, $\tilde{\beta}_1,\ldots$ $\ldots,\tilde{\beta}_{\tilde{m}}$— любые положительные числа.

Московский областной педагогический институт
им. Н. К. Крупской

Поступило
16 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. С. Владимиров*, Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964. [2] *Б. А. Фукс*, Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962. [3] *Z. Opial, J. Siciak*, Zesz. nauk. Uniw. Jagiell., № 77, 67 (1963). [4] *F. Bierski*, Ann. Polon. Math., v. 18, 163 (1966). [5] *F. Bierski*, ibid., v. 18, 357 (1966). [6] *Л. А. Айзенберг*, ДАН, т. 151, № 6 (1963). [7] *И. И. Баврин*, ДАН, т. 180, № 1 (1968).