Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 4

УДК 519.3

МАТЕМАТИКА

Р. ГАБАСОВ, Б. Ш. МОРДУХОВИЧ

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 10 IX 1973)

1. Вопросы существования оптимальных управлений занимают принципиальное место в теории оптимальных процессов ([1]), они исследованы в многочисленных работах. Традиционные методы доказательства, основанные на идеях компактности и полунепрерывности, сводят вопросы существования решений рассматриваемых ниже задач к установлению некоторых свойств замкнутости траекторных множеств в конечномерных или функциональных пространствах. На таком пути получены теоремы существования с весьма жесткими предположениями об определенной выпуклости множества допустимых скоростей ([2, 3]) и линейности системы по состоянию ([4]). Традиционные методы доказательства характерны тем, что, нацеливаясь на свойства типа замкнутости снизу ([5]), они не учитывают многих важных параметров задачи оптимизации (граничные условия, значения минимизируемого функционала), от которых, как правило, и зависит существование решения в конкретных задачах. Вместе с тем условия выпуклости множества допустимых скоростей не только достаточны, но и необходимы ([5, 6]) для замкнутости снизу. Таким образом, возникает необходимость получения теорем существования, учитывающих специфику конкретных задач (и н д и в и д у а л ь н ы е теоремы).

2. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления в классе измеримых функций:

$$\dot{x}=f(x, u, t), \quad (x(t_0), t_0)\in D, \quad t_1\in\Gamma, \quad t\in T, \quad u(t)\in U(t)\subset\tilde{U}, \tag{1}$$

$$I(x, u)=\varphi(x(t_1), t_1)\to\min, \tag{2}$$

где T — отрезок прямой, $D\subset R^n\times T$ и $\Gamma\subset T$ — компакты конечномерных пространств, $\tilde{U}$ — полное сепарабельное метрическое пространство.

Предположим, что:

а) скалярная функция $\varphi(x, t)$ полунепрерывна снизу по (x, t), n-мерная функция $f(x, u, t)$ непрерывна по (x, u), измерима по t и удовлетворяет неравенству $\|f(x, u, t)\|\leqslant\Pi(t)g(\|x\|)$, где $\Pi(t)$ суммируема на T, $g(\|x\|)$ непрерывна и $g(\|x\|)=O(\|x\|)$ при $\|x\|\to\infty$;

б) множество $\mathfrak{F}_U=\{(u, t)\in\tilde{U}\times T, u\in U(t)\}$ аналитическое (mod 0), множество $Q(x, t)=\{q: q=f(x, u, t), u\in U(t)\}$ полунепрерывно сверху по x в смысле Куратовского (см., например, ([6])).

Для доказательства теорем существования в задаче (1), (2) рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\dot{x}=g(x, \omega, t), \quad x(t_0), \quad (t_0)\in D, \quad t_1\in\Gamma, \quad \omega(t)\in\Omega(t)=P\times U^{n+1}(t), \tag{3}$$

$$I(x, \omega)=\varphi(x(t_1), t_1)\to\min, \tag{4}$$

$$P=\left\{\alpha_i:\ \alpha_i\geqslant0,\ \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i=1\right\}, \quad g(x, \omega, t)=\sum_{i+1}^{n+1}\alpha_i f(x, u_i, t).$$

При условиях а), б) в задаче (3), (4) существует оптимальное управление $\omega^0(t)=\{\alpha_i^0(t), u_i^0(t)\}$, $i=1, \ldots, n+1$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, в классе измеримых функций ([2, 7]). Индивидуальные теоремы существования в задаче (1), (2) получим с помощью необходимых условий оптимальности во вспомогательной задаче (3), (4), которые позволяют привлечь конструктивную информацию об ее решениях. При этом **теоремами существования** n-го **порядка** естественно назвать такие теоремы, которые получаются в рассматриваемой схеме с помощью необходимых условий оптимальности n-го порядка ([8]). Предполагаемый подход устанавливает взаимосвязь между теорией существования и теорией необходимых условий оптимальности.

3. Приведем сначала некоторые теоремы существования первого порядка в задаче (1), (2), которые включают большинство из ранее известных результатов. Дополнительно к условиям а) б) предположим, что:

в) функции $\varphi(x, t)$, $f(x, u, t)$ дифференцируемы по переменным состояния, причем $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, t)$ непрерывна по x, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u, t)$ непрерывна по (x, u), измерима по t и ограничена по норме суммируемой на T функцией.

Рассмотрим функции Гамильтона

$$H(x, \psi, u, t)=\psi' f(x, u, t), \quad \mathfrak{B}(x, \psi, \omega, t)=\psi' g(x, \omega, t)=\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i H(x, \psi, u_i, t),$$

где штрих означает транспонирование. Вдоль решения задачи (3), (4) построим множества $M^0(t)$ и $V^0(t)$ по следующему правилу:

$$M^0(t)=\{u\colon u\in U(t),\ H(x^0(t), \psi^0(t), u, t)=\max_{\tilde{u}\in U(t)} H(x^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}, t),$$
$$V^0(t)=\{v\colon v=f(x^0(t), u, t),\ u\in M^0(t)\}, \tag{5}$$

$$\dot{\psi}=-\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x}(x^0(t), \psi, \omega^0(t), t), \quad \psi(t_1)=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x^0(t_1), t_1), \quad t_0\leqslant t\leqslant t_1. \tag{6}$$

Из принципа максимума Понтрягина в задаче (3), (4) заключаем, что оптимальное управление $\omega^0(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, является особым на множестве $\Omega^0(t)=P\times(M^0(t))^{n+1}$, т. е. для всех $\omega\in\Omega^0(t)$ и п.в. $t\in[t_0, t_1]$ выполняется

$$\mathfrak{H}(x^0(t), \psi^0(t), \omega^0(t), t)=\mathfrak{H}(x^0(t), \psi^0(t), \omega, t). \tag{7}$$

Из соотношения (7) вытекает следующая теорема существования (близкие теоремы получены в ([9], [10])).

Теорема 1. *Пусть параметры задачи* (1), (2) *удовлетворяют условиям* а)—в). *Если вдоль некоторого решения задачи* (3), (4) *множество* $V^0(t)$ (5) *выпукло при п.в.* $t\in[t_0, t_1]$, *то в задаче* (1), (2) *существует оптимальное управление.*

При условиях теоремы 1 оптимальная траектория $x^0(t)$ задачи (3), (4) реализуется в исходной задаче (1), (2). Приведем одну более тонкую теорему первого порядка, которая гарантирует существование решения задачи (1), (2), в то время как отмеченное выше свойство может не выполняться. Обозначим через $\tilde{x}$ $(n-1)$-мерный вектор, составленный из первых компонент n-мерного вектора $x=(\tilde{x}, x_n)$.

Теорема 2. *Пусть параметры задачи* (1), (2) *удовлетворяют условиям* а)—в). *Предположим далее, что* $\tilde{f}(x, u, t)=A(u, t)\tilde{x}+b(u, t)$, $f_n(x, u, t)=f_{1n}(x, t)+f_{2n}(u, t)$, *функция* $\varphi(x, t)$ *вогнута по* x.

В задаче (1), (2) существует оптимальное управление, если вдоль некоторого решения задачи (3), (4) множество $S^0(t)=\{s\colon s=(\tilde{\psi}^0(t))'A(u, t),\ u\in M^0(t)\}$ выпукло при п.в. $t\in[t_0, t_1]$ и выполняется одно из свойств:

1) $\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x^0(t_1), t_1)>0$, $\quad f_{1n}(x, t)$ вогнута по x;

2) $\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x^0(t_1), t_1)<0$, $\quad f_{1n}(x, t)$ выпукла по x;

3) $\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x^0(t_1), t_1)=0$.

Теорема 2, которая обобщает результат из ([11]), доказывается с помощью (7) и формулы приращения функционала качества в (3), (4) (см. ([12])).

4. Рассмотрим некоторые теоремы существования высокого порядка, полученные с помощью необходимых условий оптимальности особых управлений. Предположим, что:

г) $f(x,u,t)=f_1(x,t)+f_2(u,t)$, функции $\varphi(x,t)$ и $f_1(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемы по x, причем $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x,t)$ измерима по t и ограничена по норме суммируемой на T функцией.

Вдоль оптимальной траектории $x^0(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, задачи (3), (4) построим функцию $\psi^0(t)$ (6), множества $V^0(t)$, $L^0(t)$ и матрицы $K^0(t)$, $\Psi^0(t)$:

$$L^0(t)=\{l:\ l'\psi^0(t)=0\},\qquad K^0(t)=\frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2}(x^0(t),\psi^0(t),t),\qquad H_1=\psi' f_1, \tag{8}$$

$$\dot\Psi^0(t)=-\frac{\partial f_1'}{\partial x}(x^0(t),t)\,\Psi^0(t)-\Psi^0(t)\frac{\partial f_1}{\partial x}(x^0(t),t)-K^0(t),$$

$$\Psi^0(t_1)=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x^0(t_1),t_1). \tag{9}$$

Вектор $a\in R^n$ и соответствующую ему прямую $\{\alpha a:\ -\infty<\alpha<\infty\}$ назовем допустимыми (недопустимыми) относительно матрицы $S\in R^{n^2}$, если $a'Sa\leqslant 0$ ($a'Sa>0$).

Множество V из n-мерного аффинного пространства назовем выпуклым относительно прямой $\{\alpha a:\ -\infty<\alpha<\infty\}$, $a\in R^n$, если вместе с любыми точками v_1, v_2 со свойством $v_1-v_2\in\{\alpha a,\ -\infty<\alpha<\infty\}$ оно содержит весь соединяющий их отрезок.

С помощью необходимого условия оптимальности с матричными импульсами ([8]) доказывается следующая теорема существования второго порядка (частные случаи получены в ([13])).

Теорема 3. *Пусть параметры задачи* (1), (2) *удовлетворяют условиям* а), б), г).

В задаче (1), (2) *существует оптимальное управление, если вдоль некоторой оптимальной траектории задачи* (3), (4) *при п.в.* $t\in[t_0,t_1]$ *выполняется одно из следующих свойств*:

1) *матрица* $\Psi^0(t)$ (9) *определенно положительна на* $L^0(t)$ (8);

2) *множество* $V^0(t)$ (5) *не лежит на одной прямой,* $L^0(t)$ *содержит гиперплоскость недопустимых относительно матрицы* $\Psi^0(t)$ *векторов;*

3) *множество* $V^0(t)$ *выпукло относительно всех допустимых прямых матрицы* $\Psi^0(t)$.

Следующая теорема существования третьего порядка доказывается с помощью необходимого условия оптимальности типа Келли ([14,8]) в классе измеримых функций. Полученные результаты (частные случаи см. в ([13])) близки по форме к результатам второго порядка (теорема 3), но независимы от них.

Теорема 4. *Пусть параметры задачи* (1), (2) *удовлетворяют условиям* а), б), г).

В задаче (1), (2) *существует оптимальное управление, если вдоль некоторой оптимальной траектории задачи* (3), (4) *при п.в.* $t\in[t_0,t_1]$ *выполняется одно из следующих свойств*:

1) *матрица* $K^0(t)$ (8) *определенно положительна на* $L^0(t)$;

2) *множество* $V^0(t)$ *выпукло относительно всех допустимых прямых матрицы* $K^0(t)$.

5. Теоремы 1—4 выражают условия существования оптимальных управлений в задаче (1), (2) через решение некоторой вспомогательной задачи, тесно связанной с исходной задачей оптимизации. За счет этого и учитывается специфика конкретных задач. Проведенный анализ и многочисленные примеры показывают, что в конкретных ситуациях данные тео-

ремы позволяют судить о существовании оптимальных управлений в задаче (1), (2) без предварительного решения вспомогательной задачи. С помощью априорных соображений и необходимых условий оптимальности нередко непосредственно удается показать, что те траектории системы (3), на которых нарушаются условия полученных теорем, не могут давать минимум функционалу (4). Вместе с тем теоремы 1—4 позволяют выделять классы систем, в которых условия существования оптимальных управлений непосредственно выражаются через все параметры задачи оптимизации. Приведем примеры.

Пример 1. Рассмотрим задачу (1), (2) вида $\dot{x}_1=u^2x_1+u$, $\dot{x}_2=x_2+u$, $x_1(0)=1$, $x_2(0)=0$, $U=\{-1, 0, 1\}$, $I(x, u)=x_2(1)-x_1(1)\to\min$.
Не прибегая к решению вспомогательной задачи, легко заключить, что $\psi_1{}^0(t)\equiv1$, $M^0(t)\equiv\{-1, 1\}$. Следовательно, $S^0(t)\equiv\{1\}$ и существование оптимальных управлений в рассматриваемой задаче гарантируется теоремой 2. Отметим, что в данном примере не «работает» ни один из известных нам результатов.

Пример 2. Рассмотрим одномерную задачу Больца, которая приводится к двумерной задаче (1), (2): $\dot{x}=a(t)x+b(u, t)$, $x(t_0)x_0$, $u(t)\in U$,

$$I(x,u)=\int\limits_{t_0}^{t_1}[f(x,t)+\lambda(u,t)]dt+\varphi(x(t_1))\to\min.$$

В данной ситуации условие 1) теоремы 4 эквивалентно неравенству

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^0(t),t)<0,\quad t\in B\subset[t_0,t_1],\quad \operatorname{mes}B=t_1-t_0. \tag{10}$$

По параметрам рассматриваемой задачи построим функции

$$\alpha(t)=\inf\left\{x:\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\geqslant0\right\},\quad \beta(t)=\sup\left\{x:\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\geqslant0\right\},$$

$$m(t)=\min_{u\in U}b(u,t),\qquad l(t)=\max_{u\in U}b(u,t),$$

$$r(t)=\alpha(t)\exp\left[-\int\limits_{t_0}^{t}a(\tau)\,d\tau\right]-\int\limits_{t_0}^{t}l(\tau)\exp\left[-\int\limits_{t_0}^{\tau}a(s)\,ds\right]d\tau,$$

$$\rho(t)=\beta(t)\exp\left[-\int\limits_{t_0}^{t}a(\tau)\,d\tau\right]-\int\limits_{t_0}^{t}m(\tau)\exp\left[-\int\limits_{t_0}^{\tau}a(s)\,ds\right]d\tau.$$

Обозначим

$$\mathfrak{B}=\{B:\ B\subset[t_0,\ t_1],\ \operatorname{mes}B=t_1-t_0\},\qquad r_0=\sup_{B\in\mathfrak{B}}\inf_{t\in B}r(t),\qquad \rho_0=\inf_{B\in\mathfrak{B}}\sup_{t\in B}\rho(t).$$

Легко видеть, что неравенство (10) заведомо выполняется, если справедливо одно из условий $x_0<r_0$, $x_0>\rho_0$, при которых, таким образом, рассматриваемая задача всегда разрешима.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина
Минск

Поступило
7 IX 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский и др.,* Математическая теория оптимальных процессов, «Наука», 1961. [2] *А. Ф. Филиппов,* Вестн. Московск. унив., сер. матем., мех., астр., физ., хим., т. 2, 25 (1959). [3] *L. Cesari,* Trans. Am. Math. Soc., v. 124, 3, 369 (1966). [4] *L. W. Neustadt,* J. Math. Anal. Appl., v. 7, 1, 110 (1963). [5] *P. Brunovsky,* SIAM J. Control., v. 6, 2, 174 (1968). [6] *L. Cesari,* ibid., v. 9, 287 (1971). [7] *Б. Ш. Мордухович,* Дифференциальные уравнения, т. 7, 12, 2161 (1971). [8] *Р. Габасов, Ф. М. Кириллова,* Особые оптимальные управления, «Наука», 1973. [9] *E. J. McShane.* SIAM J. Control., v. 5, 3, 438 (1967). [10] *Г. П. Иванова,* ДАН, т. 170, № 2, 253 (1966). [11] *Б. Ш. Мордухович,* Дифференциальные уравнения, т. 8, 11, 1994 (1972). [12] *Р. Габасов, Ф. М. Кириллова,* Качественная теория оптимальных процессов, «Наука», 1971. [13] *Б. Ш. Мордухович,* Вестн. Белорусск. унив. сер. 1, матем., физ., мех., № 1, 89 (1972). [14] *Г. Келли,* Ракет. техн. и космонавт., т. 8, 26 (1964).