Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 4

УДК 533.951 *ФИЗИКА*

С. С. КАЛМЫКОВА

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПУЧКА В ОТКРЫТОМ РЕЗОНАТОРЕ

(Представлено академиком Б. Б. Кадомцевым 3 VII 1973)

Коллективное взаимодействие релятивистских электронных пучков с плазмой и вакуумными замедляющими и резонансными структурами может быть использовано, в частности, для разработки генераторов и усилителей с.в.ч.-колебаний ([1-8]). В настоящее время методы генерации, основанные на черенковском и допплеровском элементарных механизмах излучения, хорошо изучены. В меньшей степени исследованы коллективные взаимодействия, обусловленные переходным излучением ([6], [8]). Ниже рассмотрен вопрос об устойчивости релятивистского пучка в открытом резонаторе и показано, что при некоторых условиях индуцированное переходное излучение частиц пучка на входе и выходе этого резонатора приводит к неустойчивости такой системы *.

Рассмотрим открытый резонатор, образованный отрезком тонкого проводящего цилиндра длиной L и радиуса a, вдоль оси которого параллельно сильному внешнему магнитному полю проходит моноэнергетический релятивистский электронный пучок того же радиуса. Задача отыскания спектров неравновесных систем такого типа в общем случае сводится к решению трансцендентного уравнения

$$\|\delta_{\alpha\gamma}-T^{(-)}_{\alpha\beta}T^{(+)}_{\beta\gamma}\exp[i(k_\beta-k_\alpha)L]\|=0. \qquad (1)$$

Компоненты тензоров $T^{(\pm)}_{\alpha\beta}$ определены как отношения амплитуд волн типа α, возбуждаемых на выходе (+) или входе (−) пучка в резонатор, к амплитудам падающих волн типа β. Аналитические выражения для этих компонент могут быть получены путем решения задач рассеяния для эквивалентных полубесконечных систем ([10]) (спектры равновесных резонансных систем исследованы аналогичным образом в ([11], [12])).

Дисперсионное уравнение аксиально-симметричных волн пучкового волновода с проводящими стенками

$$(k_0^2-k_\parallel^2)[1-\omega_{b\parallel}^2/(\omega-k_\parallel V_0)^2]=\lambda_s^2/a^2, \quad k_0\equiv\omega/c,$$

(λ_s — корни функции Бесселя $J_0(\lambda_s)=0$, $\omega_{b\parallel}^2\equiv4\pi e^2n_b/(m_0\gamma^3)$, n_b — плотность пучка, $\gamma\equiv(1-\beta_0^2)^{-1/2}$, $\beta_0\equiv V_0/c$, V_0 — скорость пучка) имеет четыре корня, два из которых описывают быструю (*1*) и медленную (*2*) волны плотности заряда, а остальные — прямую (*3*) и встречную (*4*) квазипоперечные волны. Навстречу пучку может распространяться лишь последняя из этих волн, поэтому у тензора $T^{(+)}_{\alpha\beta}$ отличны от нуля компоненты $T^{(+)}_{4\beta}$ $\beta=1, 2, 3$, а у тензора $T^{(-)}_{\alpha\beta}$ —компоненты $T^{(-)}_{\alpha4}$, $\alpha=1, 2, 3$. Таким образом, в случае сильного магнитного поля и совпадающих радиусах пучка и проводящего цилиндра уравнение спектра (1) содержит только произведения $T^{(+)}_{4\alpha}\cdot T^{(-)}_{\alpha4}$, $\alpha=1, 2, 3$.

* Впервые возможность использования понятия индуцированного переходного излучения для объяснения механизмов самовозбуждения ряда вакуумных генераторов отмечена в ([9]).

Опуская подробности решений систем парных интегральных уравнений, к которым сводятся задачи рассеяния в эквивалентных полубесконечных пучковых волноводах ([10]), приведем окончательные выражения для этих произведений:

$$T_{43}^{(+)}\cdot T_{34}^{(-)}=-\frac{1}{16}\frac{\varepsilon^2(0)}{k_3^4a^4}\left[\frac{X^-(-k_3)}{X^+(k_3)}\right]^2; \tag{2а}$$

$$T_{4l}^{(+)}\cdot T_{l4}^{(-)}=(-1)^l\cdot\frac{\gamma(I^{(s)})^{1/2}}{2\lambda_s k_3 a}\left[\frac{X^-(-k_3)}{X^+(\omega/V_0)}\right]^2,\quad l=1,2; \tag{2б}$$

$$\varepsilon(k)\equiv1-\omega_{b\|}^2/(\omega-kV_0)^2,\qquad I^{(s)}\equiv\omega_{b\|}^2a^2/(\lambda_s^2c^2);$$

здесь $X^\pm(k)$ — ограниченные на бесконечности решения однородной задачи сопряжения ([13]);

$$X^+(k)=J(k)X^-(k), \tag{2в}$$

$$J(k)\equiv\frac{1}{2}\left[\frac{K_1(\varkappa a)}{K_0(\varkappa a)}-\frac{k_\perp a}{\varkappa a}\frac{J_1(k_\perp a)}{J_0(k_\perp a)}\right],$$

$$\varkappa^2\equiv k^2-k_0^2,\qquad k_\perp^2\equiv-\varepsilon(k)\varkappa^2.$$

Учитывая малость тока пучка ($I^{(s)}\ll1$) и продольного волнового числа квазипоперечных волн ($k_3\ll k_0$), получим аналитические выражения для $T_{4\alpha}^{(+)}\cdot T_{\alpha4}^{(-)}$ в случае $s=1$:

$$T_{43}^{(+)}\cdot T_{34}^{(-)}=\exp\{-2[i\zeta(k_3)+\delta(k_3)+I^{(1)}\cdot\nu]\}; \tag{3а}$$

$$[T_{41}^{(+)}\cdot T_{14}^{(-)}\exp(ik_1L)+T_{42}^{(+)}\cdot T_{24}^{(-)}\exp(ik_2L)]\exp(-ik_3L)=$$
$$=4I^{(1)}\frac{k_3L}{\lambda_s}\frac{\sin\theta_l}{\theta_l}\exp\left\{i\left[\frac{\omega L}{V_0}-k_3L-\xi_l(k_3)-\zeta_l\right]-\delta_l\right\}. \tag{3б}$$

Здесь введены обозначения для функций, появляющихся при решении задачи (2в):

$$z_\pm(x)\equiv(k_0^2\pm x^2)^{1/2}a,\qquad z_+(ix_1)=\lambda_1,\qquad \theta_l\equiv\frac{\omega_{b\|}L}{\gamma V_0},$$

$$\zeta_l(k)\equiv\frac{2k}{\pi}\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+k^2}\operatorname{arctg}\left\{\frac{N_0[z(x)]}{J_0[z(x)]}\right\},$$

$$\delta(k)\equiv\frac{2k}{\pi}\int_{k_0}^{x_1}\frac{dx}{x^2-k^2}\left\{\operatorname{arctg}\frac{N_0[z(x)]}{J_0[z(x)]}-\frac{\pi}{2}\right\},$$

$$\nu(\gamma)\equiv\lambda_1^2\left\{\frac{1}{\mu_1^2}+\sum_{s=2}^\infty\left[\frac{1}{\mu_s^2}-\frac{1}{\lambda_s^2}+\frac{1}{2}\frac{\lambda_s^2}{(\lambda_s^2-\lambda_1^2)^2}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\int_0^\infty\frac{x^3\,dx}{(x^2+\lambda_1^2/\gamma^2)^2}\cdot\frac{2\lambda_1^2-x^2}{\lambda_1^2-x^2}[J_0^2(x)+J_1^2(x)]\right\},$$

$$\delta_l\equiv\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^1\frac{dx}{1+x}\operatorname{arctg}\frac{N_0(\lambda_1(1-x^2)^{1/2})}{J_0(\lambda_1(1-x^2)^{1/2})}-\sum_{s=2}^\infty\int_{\lambda_s}^{\lambda_{s+1}}\frac{dx}{x^2}\operatorname{arctg}\frac{N_0(x)}{J_0(x)}\right\}\simeq0{,}70$$

$$\xi_l = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\operatorname{arctg}\frac{N_0(\lambda_1(1+x^2)^{1/2})}{J_0(\lambda_1(1+x^2)^{1/2})},$$

а постоянные μ_s определяются уравнением

$$K_0\left(\frac{\lambda_1}{\gamma}\right)\cdot\mu_s J_1(\mu_s) = \frac{\lambda_1}{\gamma}J_0(\mu_s)K_1(\lambda_1/\gamma).$$

Подставляя (3) в (1), получим окончательные выражения для сдвига собственной частоты резонатора $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_0 = \Delta\omega' + i\Delta\omega''$:

$$\frac{\Delta\omega'}{\omega_0} = \frac{\pi^2 m^2 (M+\psi')^2}{\lambda_1 D}, \quad D \equiv [(M+\psi')^2 + (\psi'' - T_m I^{(1)} M)^2]^2; \tag{4а}$$

$$\frac{\Delta\omega''}{\omega_0} = -\frac{2\pi m}{\lambda_1 D}\{\pi m\psi'' + I^{(1)}[2\nu(M+\psi') - \pi m T_m M]\}, \tag{4б}$$

где введены обозначения:

$$\omega_0 = \frac{c\lambda_1}{a}, \quad M \equiv \frac{L}{a}(2\lambda_1)^{1/2}, \quad T_m \equiv (-1)^m \cdot \frac{2}{\lambda_2} x \frac{\sin\theta_l}{\theta_l}\cos\varphi_m,$$

$$\varphi_m \equiv \frac{\omega_0 L}{V_0} - \xi\left(\frac{\pi m}{L}\right) - \xi\left(\frac{\omega}{V_0}\right), \quad \psi' + i\psi'' = \frac{M}{L}\left[\frac{d\zeta}{dk} - i\frac{d\delta}{dk}\right]\Bigg|_{k\to 0}; \quad M \gg \pi m.$$

Последнее неравенство обеспечивает возможность пренебрежения вкладом неволновых (квазистатических) полей рассеяния в (1), а также падением статического потенциала по сечению пучка ([14]).

Из этих выражений видно, что при достаточно больших токах пучка, когда выполнено неравенство

$$I^{(1)}[T_m - 1\nu/(\pi m)] > \psi''/M, \tag{5}$$

рассматриваемая система (пучок — открытый резонатор) становится неустойчивой относительно возбуждения колебаний с частотой порядка первой критической ($\omega_0 \simeq c\lambda_1/a$), несмотря на то, что фазовая скорость возбуждаемой волны ($V_\text{ф}'' \equiv \omega_0/k_3 \simeq cM/(\pi m)$) велика по сравнению со скоростью частиц пучка. В основе этой неустойчивости, не требующей синхронизма пучка с полем в области взаимодействия, лежат прямой и обращенный эффекты индуцированного когерентного переходного излучения частиц пучка на входе и выходе резонатора ([8]), приводящие к коллективным процессам взаимной трансформации волн плотности заряда и электромагнитных волн на этих неоднородностях *.

Действительно, положительный вклад в инкремент (3б) дают лишь те компоненты произведений $T_{4\alpha}^{(+)}\cdot T_{\alpha 4}^{(-)}$, которые описывают прямой и обращенный эффект трансформации волн плотности заряда в электромагнитные $\left(T_m \sim \sum\limits_{l=1}^{2} T_{4l}^{(+)}\cdot T_{l4}^{(-)}\right)$. С увеличением номера продольного волнового числа эффективность трансформации возрастает, а вынос пучком энергии волны из резонатора, описываемый слагаемым $\nu(\gamma)$, уменьшается (вследствие уменьшения продольной компоненты поля $E_z \sim \frac{L}{\pi m}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r E_r\bigg)$.

Поэтому условие самовозбуждения (5) выполняется прежде всего для

* Возбуждение открытых резонаторов в приближении заданного тока рассматривалось в ([15–17]).

больших m, удовлетворяющих, однако, требованию достаточно хорошего отражения на торцах $(\pi m \ll M)$. С уменьшением поперечной длины волны $(s \geqslant 2)$ число когерентно излучающих частиц пучка уменьшается $(N_{\text{ког}} \sim \pi n b a^2 / \lambda_s)$; соответственно убывает положительный вклад эффектов трансформации и инкремент (4б).

Если квадратная скобка в (4б) положительна, а неравенство (5) выполнено для абсолютной величины токового члена, то предварительно возбужденное в резонаторе поле затухает в результате индуцированного поглощения его частицами пучка, что может быть использовано для модуляции последнего.

Таким образом, рассмотренная система открытый резонатор — релятивистский пучок неустойчива. В основе этой неустойчивости лежат прямой и обращенный эффекты переходного излучения на входе и выходе резонатора, или (на волновом языке) эффекты взаимной трансформации волн плотности заряда и волноводных типов колебаний.

Автор выражает благодарность чл.-корр. АН СССР Л. А. Вайнштейну за ценные дискуссии.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
25 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. В. Гапонов, В. К. Юлпатов,* Радиотехника и электроника, т. 7, 631 (1962). [2] *Е. Е. Ловецкий, А. А. Рухадзе,* ЖЭТФ, т. 48, 514 (1965). [3] *Я. Б. Файнберг,* Международн. конфер. по ускорителям, Ереван, 1969, Ереван, 1970, стр. 465; Симпозиум по коллективным методам ускорения, Дубна, 1972, Дубна, 1972, стр. 77. [4] *В. И. Курилко,* ЖЭТФ, т. 57, 899 (1969); *В. И. Курилко, А. П. Толстолужский, Л. Б. Файнберг,* Атомная энергия, т. 32, 137 (1972). [5] *М. И. Петелин,* Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, т. 13, 1586 (1970). [6] *В. К. Юлпатов,* Там же, т. 13, 1784 (1970). [7] *В. Ф. Русин,* Электроника больших мощностей, в. 5 (1968). [8] *С. С. Калмыкова,* ДАН, т. 208, 1062 (1973). [9] *А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. Н. Юлпатов,* Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, т. 10, 1414 (1967). [10] *С. С. Калмыкова, В. И. Курилко,* ПММ, т. 33, 638 (1969). [11] *Л. А. Вайнштейн,* Открытые резонаторы и открытые волноводы, М., 1967. [12] *В. П. Шестопалов, А. В. Щербак,* Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, т. 11, 285, 297 (1968). [13] *Н. И. Мусхелишвили,* Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», 1968. [14] *Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе,* УФН, т. 103, 641 (1971). [15] *Л. А. Вайнштейн,* Основы сверхвысокочастотной электроники, Саратов, 1970. [16] *В. М. Черненко,* Электроника больших мощностей, в. 6, 135 (1969). [17] *Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский,* ЖТФ, т. 34, 704, 711, 1856 (1964).