Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 4

УДК 539.374 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Я. А. КАМЕНЯРЖ

О ЗАДАНИИ МОДЕЛЕЙ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИИ ДИССИПАЦИИ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 11 IX 1973)

В последнее время показано, что для некоторого класса моделей, и в частности для моделей Мизеса и Треска, как в случае идеальной пластичности, так и при наличии упрочнения, пластические свойства среды могут быть заданы функцией диссипации $\sigma(e^{ij})$ однородной первой степени относительно скоростей пластических деформаций e^{ij} [1]. При этом для напряжений принимается

$$P_{ij}=\partial\sigma/\partial e^{ij}. \tag{1}$$

Как показано в работах [1, 2], P_{ij}, определенные по формуле (1), образуют поверхность нагружения в пространстве напряжений, обращение (1) приводит к ассоциированному закону.

В дальнейшем для краткости заменим P_{ij} на X_i, e^{ij} — на x^i, $i=1, 2, \ldots, n$. В формуле (1) подразумевается, что функция $\sigma(x^i)$ непрерывно дифференцируема и определена в пространстве x^i внутри открытого выпуклого конуса K размерности n.

Если на x^i наложена дополнительная связь (например, x^i принадлежат границе $\varphi(x^i)=0$ конуса K) или производные $\partial\sigma/\partial x^i$ терпят разрыв на некоторой поверхности, то из (1) не вытекают в полном виде обычные соотношения теории пластичности. В этом случае для получения различных X_i на поверхности нагружения в формулу (1) следует ввести дополнительные члены. Этот факт и соответствующие члены в случае условия пластичности, характерного для сыпучих сред, были указаны в [3]. Покажем, что распространение подхода [1, 3] на более общий случай также приводит к поверхности нагружения в пространстве X_i и ассоциированному с ней закону для x^i.

Пусть при приближении изнутри конуса к точке x', принадлежащей границе Σ конуса K, величины $\partial\sigma/\partial x^i$ ограничены. Тогда поверхность нагружения $f(X_i)=0$ имеет край, образованный предельными значениями $\partial\sigma/\partial x^i$ при $x\to x'$ (x' пробегает Σ). Соотношение (1) следует доопределить в точках x' так, чтобы поверхность нагружения не имела края.

Пусть Σ задается уравнением $\varphi(x^i)=0$, где $\varphi(x^i)$ однородна, так как K — конус (внутренность K соответствует неравенству $\varphi(x^i)\leqslant 0$). Условие $\varphi(x^i)=0$ называется дилатанционной зависимостью. Положим в точке x'

$$X_i(x')=\partial\sigma/\partial x^i|_{x'}+\nu\,\partial\varphi/\partial x^i, \quad 0\leqslant\nu<\infty, \tag{2}$$

где $\partial\sigma/\partial x^i|_{x'}$ — предельные значения производных при $x\to x'$ изнутри K. Наличие в (2) нового независимого параметра ν является необходимым, если, как обычно, предполагать, что X_i могут зависеть лишь от направления $x'/|x'|$, но не от $|x'|$. Действительно, в этом случае параметры $x'^i/|x'|$, $x'\in\Sigma$, образуют многообразие размерности $n-2$, в то время как X_i должны образовать гиперповерхность в пространстве размерности n.

Аналогично, если на поверхности $\psi(x^i)=0$ внутри K претерпевают разрыв производные $\partial\sigma/\partial x^i$, $\psi(x^i)$ также однородна и $\psi(x^i)=0$ называется дилатанционной зависимостью. Согласно кинематическому условию совместности $\partial\sigma/\partial x^i|_+=\partial\sigma/\partial x^i|_-+\varkappa\partial\psi/\partial x^i$. Тогда в точке x поверхности $\psi(x^i)=0$ положим

$$X_i=\partial\sigma/\partial x^i|_-+\nu\,\partial\psi/\partial x^i,\quad 0\leqslant\nu\leqslant\varkappa. \tag{3}$$

Отметим, что дополнительные члены в (2), (3) не дают вклада в диссипацию $\sigma=X_i(x^j)x^i$ в силу условия $\varphi(x^i)=0$ и однородности функции $\varphi(x^i)=0$ [1].

Покажем, что X_i, определенные (2) или (3), лежат на некоторой поверхности нагружения, а соответствующие x^i определяются из ассоциированного с ней закона. Действительно, пусть ξ^α, $\alpha=1, 2, \ldots, n-1$,— координаты на поверхности $\varphi(x^i)=0$, $\xi^n=\nu$. Ранг якобиана $M_{ij}=\partial X_i/\partial\xi^j$ не превышает $n-1$ в силу линейной зависимости его строк,

$$x^iM_{ij}=\begin{cases} x^i\left(\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial x^i\,\partial x^k}+\nu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\,\partial x^k}\right)\dfrac{\partial x^k}{\partial\xi^j}=\nu\dfrac{\partial}{\partial\xi^j}(s-1)\varphi=0, & j\leqslant n-1,\\ s\varphi=0, & j=n\end{cases} \tag{4}$$

(учтена однородность $\sigma(x^i)$ первой степени и $\varphi(x^i)$ — степени s). Следовательно, существует зависимость $f(X_i)=0$. Дифференцируя по ξ^j, находим $M_{ij}\,\partial f/\partial X_i=0$. Тогда из (4) следует ассоциированный закон $x^i=\lambda\,\partial f/\partial X_i$. При понижении ранга M_{ij} в правой части необходимо провести суммирование по всем линейно независимым решениям системы $z_{(\omega)}{}^iM_{ij}=0$, в качестве которых можно взять $\partial f_{(\omega)}/\partial X_i$.

Пусть, наконец, функция диссипации определена на конусе K_{n-k} размерности $n-k$, составляющем в силу выпуклости часть подпространства E_{n-k} пространства x^i. Функцию диссипации зададим как ограничение на E_{n-k} некоторой функции $\sigma=\sigma(x^i)$. Пусть в координатах $y^i=A_i{}^jx^i$ подпространство E_{n-k} задается уравнениями $y^\tau=0$ или $\varphi^\tau(x^i)=A_i{}^\tau x^i=0$, $\tau=n-k+1,\ldots,n$. Положим *

$$X_i=\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}+\sum_{\tau=n-k+1}^{n}\nu_\tau\frac{\partial\varphi^\tau}{\partial x^i},\quad \nu_\tau\in(-\infty,\infty). \tag{5}$$

Определенные так X_i не зависят от выбора функции $\sigma(x^i)$, совпадающей с заданной на E_{n-k}. Действительно, если $\sigma_1(x^i)$, $\sigma_2(x^i)$ — такие функции, то E_{n-k} — поверхность уровня для $\sigma_1(x^i)-\sigma_2(x^i)$, следовательно $\partial(\sigma_1-\sigma_2)/\partial x^i=\sum\nu_\tau\,\partial\varphi^\tau/\partial x^i$.

Рассмотрим на E_{n-k} функцию $\sigma^*=\sigma^*(y^\alpha)=\sigma(B_\alpha{}^iy^\alpha)$, $B_k{}^iA_i{}^k=\delta_j{}^i$, $\alpha=1,\ldots,n-k$. Сворачивая (5) с $B_\alpha{}^i$, получим $Y_\alpha=\partial\sigma^*/\partial y^\alpha$ ($Y_\alpha=B_\alpha{}^iX_i$), где $\sigma^*(y^\alpha)$ определена в E_{n-k} на конусе той же размерности, что и E_{n-k}. В таком случае, как показано выше, из последнего соотношения следует $f^*(Y_\alpha)=0$, $y^\alpha=\lambda\,\partial f^*/\partial Y_\alpha$ или

$$f(X_i)=f^*(B_\alpha{}^iX_i)=0,\qquad x^i=B_\alpha{}^iy^\alpha=\lambda B_\alpha{}^i\frac{\partial f^*}{\partial Y_\alpha}=\lambda\frac{\partial f}{\partial X_i}. \tag{6}$$

Поверхность нагружения, очевидно, является цилиндром. В частности, если принято условие пластической несжимаемости, то E_{n-1} — пространство тензоров-девиаторов, а $c\,\partial\varphi/\partial x^i$ изображает шаровые тензоры. Представим X_i в виде суммы девиаторной и шаровой составляющих $X_i=X_i{}^d+X_i{}^s$, $X_i{}^s=c\,\partial\varphi/\partial x^i=cA_i{}^n$. Тогда $B_\alpha{}^iX_i{}^s=0$ и условие нагружения (6) зависит лишь от девиатора тензора напряжений.

По существу проведенное доопределение $X_i(x')$ является необходимым для выполнения некоторых естественных требований. Пусть, например, B_{n-2} — край поверхности $f(X_i)=0$, образованный предельными значениями

* На границе K_{n-k} в E_{n-k} и на поверхности разрыва производных добавляются члены (2) и (3) соответственно.

$\partial\sigma/\partial x^i$ при $x \to x' \in \Sigma$. Поставим задачу об определении $X_i(x')$ с учетом следующих требований:

а) поверхность нагружения должна разделять пространство X_i на две части, поэтому $X_i(x')$ для x', пробегающего Σ, должны заполнять некоторую поверхность $g(X_i)=0$, примыкающую к $f(X_i)=0$ по B_{n-2};

б) на поверхности $g(X_i)=0$ остается справедливым ассоциированный закон $x^i=\lambda\partial g/\partial X_i$. Отсюда следует, что на B_{n-2} поверхности $f(X_i)=0$ и $g(X_i)=0$ имеют общую нормаль x' $(x'=\lambda_1\,\partial g/\partial X_i=\lambda_2\partial f/\partial X_i)$.

Задача нахождения поверхности, удовлетворяющей этим условиям и такой, что нормаль к ней в каждой точке принадлежит конусу Σ, является задачей Коши для некоторого уравнения с частными производными первого порядка ([4]).

Пусть $f(X_i)=0$, $g(X_i)=0$ имеют вид $X_n-F(X_\alpha)=0$, $X_n-G(X_\alpha)=0$, $\alpha=1,\ldots,n-1$, $\varphi(x^i)=0$ — конус Σ. Тогда сформулированная выше задача заключается в построении решения $G(X_\alpha)$ уравнения

$$\Phi(\partial G/\partial X_1,\ldots,\partial G/\partial X_{n-1})=\varphi(-\partial G/\partial X_1,\ldots,-\partial G/\partial X_{n-1},1)=0,$$

удовлетворяющего на M_{n-2} (проекции B_{n-2} на плоскость $X_n=0$) условиям

$$G(X_\alpha)=F(X_\alpha),\quad \partial G/\partial X_\alpha=\partial F/\partial X_\alpha\quad (F\text{ задано}).$$

Условие характеристичности начальной полосы, заключающееся в возможности разложения вектора $\Phi'=\{\partial\Phi/\partial(\partial G/\partial X_\alpha)\}$ по касательным векторам $t_1,\ldots,t_{n-2}$ к M_{n-2}, вообще говоря, не выполнено, поскольку Φ' определяется лишь при помощи функции $\varphi(x^i)$, а компоненты $t_1,\ldots,t_{n-2}$ — через значения вторых производных от $\sigma(x^i)$, не связанные с $\varphi(x^i)$ и имеющие большой произвол. Таким образом, поставленная задача имеет решение и притом единственное. Решение дано выше доопределением X_i для x', принадлежащих Σ.

Автор благодарен акад. Л. И. Седову и А. Г. Куликовскому за полезное обсуждение.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. И. Седов*, Механика сплошной среды, т. 2, «Наука», 1973. [2] *Д. Д. Ивлев*, ДАН, т. 176, № 5, 1037 (1967). [3] *И. А. Бережной, Д. Д. Ивлев, В. Б. Чадов*, ДАН, т. 213, № 6 (1973). [4] *Р. Курант*, Уравнения с частными производными, М., 1964.