Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 4

УДК 518.733.431 МАТЕМАТИКА

А. Г. ЧЕНЦОВ

ОБ УСЛОВИЯХ СТАБИЛЬНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ *

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 10 IX 1973)

Рассмотрим систему

$$dx/dt=f(t,\ x,\ u,\ v),\quad x(t_0)=x_0, \tag{1}$$

$$x\in R^n,\quad u\in P\subset R^p,\quad v\in Q\subset R^q, \tag{2}$$

где P и Q компактны, $f(\cdot)$ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая по x функция, причем всякое решение уравнения в контингенциях

$$dx(t)/dt\in\overline{\mathrm{co}}\{y\colon\ y=f(t,\ x(t),\ u,\ v);\ u\in P,\ v\in Q\} \tag{3}$$

при условиях $x(t_*)\in E$, $t_*\in[t_0,\ \vartheta_0]$ равномерно ограничено на $[t_*,\ \vartheta_0]$ для всякого ограниченного $E\subset R^n$.

Рассмотрим программную конструкцию ([7]), основными элементами которой являются класс $\{\mathscr{H}(m(\cdot)),\ [t_*,\ \vartheta]\}$ допустимых программных управлений $\eta(\cdot)$, класс $\{\mathscr{E}(m(\cdot)),\ [t_*,\ \vartheta]\}$ программных управлений $\nu(\cdot)$ II игрока и программа $\{\Pi(\nu(\cdot)),\ [t_*,\ \vartheta]\}$, $\nu(\cdot)\in\{\mathscr{E}(m(\cdot)),\ [t_*,\ \vartheta]\}$, назначаемая II игроком; $t_0\leqslant t_*\leqslant\vartheta\leqslant\vartheta_0$.

На множестве $\{(\vartheta,\ x,\ m)\colon\ (\vartheta,\ m)\in M\subset\Theta\times R^m,\ x\in R^n\}$ задана непрерывная и непрерывно дифференцируемая по x в области $\omega_0<\omega<\omega^0$ функция $\omega(\vartheta,\ x,\ m)$. Множества $\Theta\subset[t_0,\ \vartheta_0]$ и $M\subset R^{m+1}$ предполагаются компактными, причем сечения $M_\vartheta=\{m\colon\ (\vartheta,\ m)\in M\}$ непусты при $\vartheta\in\Theta$ и $\max\limits_{\Theta}\vartheta=\vartheta_0$.

Обозначим $\varphi(t,\ t_*,\ x_*,\ \eta(\cdot))$, где $\eta(\cdot)\in\{\mathscr{H}(m(\cdot)),\ [t_*,\ \vartheta]\}$, $t\in\in[t_*,\ \vartheta]$,— программное движение ([2], [7]), порожденное управлением $\eta(\cdot)$, а $\mathscr{G}(t^*,\ t_*,\ x_*,\ \nu(\cdot))$ — область достижимости ([1], [7]) в момент $t^*\in[t_*,\ \vartheta]$ для программы $\{\Pi(\nu(\cdot)),\ [t_*,\ \vartheta]\}$. Тогда для всякой позиции $(t_*,\ x_*)$ и момента $\vartheta\in\Theta$, $t_0\leqslant t_*\leqslant\vartheta\leqslant\vartheta_0$, определим величины

$$\varepsilon^0(t_*,x_*,\vartheta)=\max_{\{\mathscr{E}(m(\cdot)),[t_*,\vartheta]\}}\ \min_{\mathscr{G}(\vartheta,t_*,x_*,\nu(\cdot))}\ \min_{M_\vartheta}\omega(\vartheta,x,m), \tag{4}$$

$$\varepsilon^0(t_*,x_*)=\min_{[t_*,\vartheta_0]\cap\Theta}\varepsilon^0(t_*,x_*,\vartheta). \tag{5}$$

Обозначим $\{\Pi(\nu(\cdot)),\ [t_*,\ \vartheta]\,|\,t_*,\ x_*\}_0$, $\vartheta\in\Theta$, множество всех оптимальных в программе $\{\Pi(\nu(\cdot)),\ [t_*,\ \vartheta]\}$ управлений I игрока, состоящее из тех и только тех управлений $\eta^0(\cdot)\in\{\Pi(\nu(\cdot)),\ [t_*,\ \vartheta]\}$, для которых

$$\min_{M_\vartheta}\omega(\vartheta,\varphi^0(\vartheta),m)=\min_{\mathscr{G}(\vartheta,t_*,x_*,\nu(\cdot))}\ \min_{M_\vartheta}\omega(\vartheta,x,m), \tag{6}$$

где $\varphi^0(\vartheta)=\varphi(\vartheta,\ t_*,\ x_*,\ \eta^0(\cdot))$; $\sigma(t_*,\ x_*,\ \vartheta)$ — множество всех оптимальных программных управлений ([7]) II игрока, состоящее из тех и только тех $\nu^0(\cdot)\in\{\mathscr{E}(m(\cdot)),\ [t_*,\ \vartheta]\}$, для которых

$$\min_{\mathscr{G}(\vartheta,t_*,x_*,\nu^0(\cdot))}\ \min_{M_\vartheta}\omega(\vartheta,x,m)=\varepsilon^0(t_*,x_*,\vartheta); \tag{7}$$

$\Theta(t_*,\ x_*)$ — множество всех моментов ϑ: $\varepsilon^0(t_*,\ x_*,\ \vartheta)=\varepsilon^0(t_*,\ x_*)$.

* Статья примыкает к исследованиям ([1–7]).

Обозначим $\mathcal{S}_0\ (t_*,\ x_*,\ \vartheta,\ \nu^0(\cdot))$ множество всех векторов s_0 вида

$$s_0' = \left[\frac{\partial}{\partial x}\omega(\vartheta, \varphi^0(\vartheta), m^0)\right]' S(\vartheta, t_*, \varphi^0(\cdot), \eta^0(\cdot)), \tag{8}$$

где $\varphi^0(\vartheta) = \varphi(\vartheta,\ t_*,\ x_*,\ \eta^0(\cdot))$, $\eta^0(\cdot) \in \{\Pi(\nu^0(\cdot)),\ [t_*,\ \vartheta] | t_*,\ x_*\}_0$, $m^0 \in M_\vartheta$ и доставляет $\min\limits_{M_\vartheta} \omega(\vartheta,\ \varphi^0(\vartheta),\ m)$; $S(\vartheta,\ t_*,\ \varphi^0(\cdot),\ \eta^0(\cdot))$ — фундаментальная матрица решений уравнения в вариациях [2, 7], $\nu^0(\cdot) \in \sigma(t_*,\ x_*,\ \vartheta)$, $\omega_0 < \varepsilon^0(t_*,\ x_*,\ \vartheta) < \omega^0$. Векторы s_0 исполняют в данных игровых задачах ту же роль, как и вектор ψ в принципе максимума в классическом случае [4, 5].

Пусть $\mathcal{W}_\varepsilon$ — множество всех позиций $(t,\ x)$, для которых $\varepsilon^0(t,\ x) \leqslant \varepsilon$, $\mathcal{X}_\Delta(t_*,\ x_*,\ \xi(\cdot))$ — семейство всевозможных программных движений на $\Delta = [t_*,\ t^*]$, порожденных управлениями $\eta(\cdot) \in \{\mathcal{H}(m(\cdot)),\ \Delta\}$, согласованными с вероятностной мерой $\xi(\cdot)$ на Q: на любых борелевских $G \subset \Delta$, $B \subset Q$ $\eta(G \times P \times B) = m(G)\xi(B)$, $m(\cdot)$ — лебегова мера на прямой.

Скажем, что $\mathcal{W}_\varepsilon$ u-стабильно, если при $(t_*,\ x_*) \in \mathcal{W}_\varepsilon$ для любых $\xi(\cdot)$ и $t^* \in (t_*,\ \vartheta_0]$ найдется либо $\varphi^c(t) \in \mathcal{X}_\Delta(t_*,\ x_*,\ \xi(\cdot))$, для которого $\min\limits_{M_\vartheta} \omega(\vartheta,\ \varphi^0(\vartheta),\ m) \leqslant \varepsilon$ при $\vartheta \in \Theta \cap \Delta$, либо $\varphi_0(t) \in \mathcal{X}_\Delta(t_*,\ x_*,\ \xi(\cdot))$, для которого $(t,\ \varphi_0(t)) \in \mathcal{W}_\varepsilon$ при $t \in \Delta$.

Обозначим $\tilde{\mathcal{W}}_\varepsilon$ множество всех позиций $(t,\ x)$, для которых $\varepsilon^0(t,\ x) \geqslant \varepsilon$.

Пусть $\gamma(\cdot)$ — вероятностная мера на P, $\mathcal{X}^{(\Delta)}(t_*,\ x_*,\ \gamma(\cdot))$ — семейство всевозможных программных движений $\varphi(t)$, $t \in \Delta$, порожденных управлениями $\eta(\cdot) \in \{\mathcal{H}(m(\cdot)),\ \Delta\}$, согласованными с $\gamma(\cdot)$: на любых борелевских $G \subset \Delta$, $A \subset P$ $\eta(G \times A \times Q) = m(G)\gamma(A)$.

Скажем, что множество $\tilde{\mathcal{W}}_\varepsilon$ v-стабильно, если при $(t_*,\ x_*) \in \tilde{\mathcal{W}}_\varepsilon$ для любых $\gamma(\cdot)$ и $t^* \in (t_*,\ \vartheta_0]$ найдется $\varphi(t) \in \mathcal{X}^{(\Delta)}(t_*,\ x_*,\ \gamma(\cdot))$, для которого $(t,\ \varphi(t)) \in \tilde{\mathcal{W}}_\varepsilon$ при $t \in \Delta$.

Рассмотрим следующее

Условие 1. Для всякой позиции $\omega_0 < \varepsilon^0(t_*,\ x_*) < \omega^0$ и $t_* \notin \Theta(t_*,\ x_*)$ и вероятностной меры $\xi(\cdot)$ на Q найдется момент $\vartheta_* \in \Theta(t_*,\ x_*)$ такой, что:

1) существует вероятностная мера $\mu(\cdot)$ на $P \times Q$, согласованная с $\xi(\cdot)$: на любых борелевских $B \subset Q$ $\mu(P \times B) = \xi(B)$, для каждого $s_0 \in \bigcup\limits_{\sigma(t_*,\ x_*,\ \vartheta_*)} \mathcal{S}_0(t_*,\ x_*,\ \vartheta_*,\ \nu(\cdot))$ удовлетворяющая неравенству

$$s_0' \int\limits_P \int\limits_Q f(t_*, x_*, u, v)\, \mu(du \times dv) \leqslant \max_Q \min_P s_0' f(t_*, x_*, u, v); \tag{9}$$

2) для каждого $\nu^0(\cdot) \in \sigma(t_*,\ x_*,\ \vartheta_*)$ существует $v^* \in Q$, для которого на любом векторе $s_0 \in \mathcal{S}_0(t_*,\ x_*,\ \vartheta_*,\ \nu^0(\cdot))$ выполнено

$$\min_P s_0' f(t_*, x_*, u, v) = \max_Q \min_P s_0' f(t_*, x_*, u, v). \tag{10}$$

Условие 1.2) выполнено, в частности, когда при каждых $\vartheta \in \Theta(t_*,\ x_*)$ и $\nu^0(\cdot) \in \sigma(t_*,\ x_*,\ \vartheta)$ множество $\mathcal{S}_0(t_*,\ x_*,\ \vartheta,\ \nu^0(\cdot))$ состоит из единственного вектора s_0, что выполняется, например, если система (1) линейна, множества $M_\vartheta \subset R^n$ выпуклы при $\vartheta \in \Theta$, а $\omega(\vartheta,\ x,\ m) = \|x - m\|$ — эвклидово расстояние.

Теорема 1. *Для u-стабильности множеств $\{\mathcal{W}_\varepsilon,\ \omega_0 \leqslant \varepsilon < \omega^0\}$ достаточно выполнения условия* 1.

Рассмотрим частный случай, когда $\Theta = \{\vartheta_0\}$.

Теорема 2. *Для u-стабильности множеств $\{\mathcal{W}_\varepsilon,\ \omega_0 < \varepsilon < \omega^0\}$ необходимо, чтобы для любой позиции $\omega_0 < \varepsilon^0(t_*,\ x_*) < \omega^0$ и вероятностной меры $\xi(\cdot)$ на Q существовала согласованная с $\xi(\cdot)$ вероятностная мера $\mu(\cdot)$ на*

$P\times Q$, *при всяком* $\nu^0(\cdot)\in\sigma(t_*, x_*)=\sigma(t_*, x_*, \vartheta_0)$, *удовлетворяющая условию*

$$\min_{\mathcal{S}_0(t_*, x_*, \vartheta_0, \nu^0(\cdot))}\left[s'\int_P\int_Q f(t_*, x_*, u, v)\,\mu(du\times dv)-\max_Q\min_P s'f(t_*, x_*, u, v)\right]\leqslant 0. \tag{11}$$

Следствие теорем 1 и 2. *Пусть для всякой позиции* $\omega_0<\varepsilon^0(t_*, x_*)<\omega^0$ $t_*\in[t_0, \vartheta_0)$ *множество* $\mathcal{S}_0(t_*, x_*, \nu^0(\cdot))=\mathcal{S}_0(t_*, x_*, \vartheta_0, \nu^0(\cdot))$ *при каждом* $\nu^0(\cdot)\in\sigma(t_*, x_*)$ *состоит из единственного вектора* s_0.

Тогда для и-стабильности множеств $\{\mathcal{W}_\varepsilon, \omega_0\leqslant\varepsilon<\omega^0\}$ *необходимо и достаточно выполнения условия* 1. 1) *при* $\vartheta_*=\vartheta_0$.

Обозначим $\mathcal{S}^*(t, x\,|\,t_*, x_*)$, $t\geqslant t_*$, $\omega_0<\varepsilon^0(t_*, x_*)<\omega^0$, множество всех векторов s вида

$$s'=\left[\frac{\partial}{\partial x}\,\omega(\vartheta, \bar\varphi_0(\vartheta), \bar m_0)\right]' S(\vartheta, t, \bar\varphi_0(\cdot), \bar\eta_0(\cdot)), \tag{12}$$

где $\vartheta\in\Theta(t, x)$, $\bar\varphi_0(\vartheta)=\varphi(\vartheta, t, x, \bar\eta_0(\cdot))$, $\bar\eta_0(\cdot)\in\{\Pi(\bar\nu_0(\cdot)), [t, \vartheta]\,|\,t, x\}_0$, $\bar\nu_0(\cdot)$ — сужение на $[t, \vartheta]\times Q$ меры $\nu_0(\cdot)\in\sigma(t_*, x_*, \vartheta)$, $\bar m_0$ доставляет $\min\limits_{M_\vartheta}\omega(\vartheta, \bar\varphi_0(\vartheta), m)$. Такое множество можно построить для всякой позиции (t, x) из достаточно малой полуокрестности $0\leqslant t-t_*<\delta$, $\|x-x_*\|<\delta$ при условии $\varepsilon^0(t, x)\leqslant\varepsilon^0(t_*, x_*)$.

Пусть $\mathcal{S}_0^*(t_*, x_*)$ — множество, составленное из тех и только тех векторов s, для которых существуют $\{(t_n, x_n)\}$: $(t_n, x_n)\to(t_*, x_*)$, $t_n\geqslant t_*$ и $\varepsilon^0(t_n, x_n)\leqslant\varepsilon^0(t_*, x_*)$, и при каждом n вектор: $s_n\in\mathcal{S}^*(t_n, x_n\,|\,t_*, x_*)$, причем $\{s_n\}$ сходится к s: $\|s_n-s\|\to 0$.

Условие 2. Для всякой позиции (t_*, x_*): $\omega_0<\varepsilon^0(t_*, x_*)<\omega^0$ и вероятностной меры $\gamma(\cdot)$ на P существует согласованная с $\gamma(\cdot)$ вероятностная мера $\mu(\cdot)$ на $P\times Q$, на любом $s\in\mathcal{S}_0^*(t_*, x_*)$ удовлетворяющая неравенству

$$s'\int_P\int_Q f(t_*, x_*, u, v)\,\mu(du\times dv)\geqslant\max_Q\min_P s'f(t_*, x_*, u, v). \tag{13}$$

Отметим, что в случае, когда множества $\sigma(t_*, x_*, \vartheta)$ для всякой позиции $\omega_0<\varepsilon^0(t_*, x_*)<\omega^0$ слабо полунепрерывны сверху по включению при изменении ϑ в каждой $\vartheta_*\in\Theta(t_*, x_*)$,

$$\mathcal{S}_0^*(t_*, x_*)\subset\bigcup_{\Theta(t_*, x_*)}\ \bigcup_{\sigma(t_*, x_*, \vartheta)}\mathcal{S}_0(t_*, x_*, \vartheta, \nu(\cdot)).$$

В частности, это выполняется, если M_ϑ меняются непрерывно с изменением ϑ.

Обобщением условия 2 является следующее

Условие 3. Для всякой позиции $\omega_0<\varepsilon^0(t_*, x_*)<\omega^0$ и вероятностной меры $\gamma(\cdot)$ на P существует вероятностная мера $\mu(\cdot)$ на $P\times Q$, для которой по любому $\alpha>0$ найдется такое $\delta>0$, что вдоль движения $\varphi_\mu(t)$, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{dx}{dt}=\int_P\int_Q f(t, x, u, v)\,\mu(du\times dv), \qquad x(t_*)=x_*,$$

при всяком t: $0<t-t_*<\delta$ и $\varepsilon^0(t, \varphi_\mu(t))\leqslant\varepsilon^0(t_*, x_*)$ существует $s\in\mathcal{S}^*(t, \varphi_\mu(t)\,|\,t_*, x_*)$, для которого

$$s'\int_P\int_Q f(t_*, x_*, u, v)\,\mu(du\times dv)>\max_Q\min_P s'f(t_*, x_*, u, v)-\alpha. \tag{14}$$

Теорема 3. *Условие 3 достаточно для v-стабильности множеств* $\{\mathcal{W}_\varepsilon, \omega_0<\varepsilon\leqslant\omega^0\}$.

Рассмотрим позиционную игру сближения — уклонения. Движения $x_{\mathcal{U},\mathcal{V}}[t]$, порожденные стратегиями $\mathcal{U}=\mathcal{U}(t,x)\subset P$ и $\mathcal{V}=\mathcal{V}(t,x)\subset Q$ I и II игроков соответственно, определяются как равномерные пределы ломаных Эйлера $x_\Delta[t]$, удовлетворяющих уравнению

$$dx_\Delta[t]/dt=f(t,x_\Delta[t],u[\tau_i^{(u)}],v[\tau_j^{(v)}]), \tag{15}$$

$$x_\Delta[t_0]=x_0, \quad u[\tau_i^{(u)}]\in\mathcal{U}(\tau_i^{(u)},x_\Delta[\tau_i^{(u)}]),$$

$$v[\tau_j^{(v)}]\in\mathcal{V}(\tau_j^{(v)},x_\Delta[\tau_j^{(v)}]), \quad \tau_{i+1}^{(u)}-\tau_i^{(u)}\leqslant\Delta,$$

$$\tau_{j+1}^{(v)}-\tau_j^{(v)}\leqslant\Delta, \quad \Delta\to 0.$$

Предположим, что $\min\limits_P\max\limits_Q s'f(t,x,u,v)=\max\limits_Q\min\limits_P s'f(t,x,u,v)$.

Задача 1. Найти стратегии $(\mathcal{U}^0,\mathcal{V}^0)$, для которых на любом движении $x^0[t]=x_{\mathcal{U}^0,\mathcal{V}^0}[t]$ выполнено

$$\sup_{\{x_{\mathcal{U}^0,\mathcal{V}}[t]\}}\min_\Theta\min_{M_\vartheta}\omega(\vartheta,x_{\mathcal{U}^0,\mathcal{V}}[\vartheta],m)\leqslant\min_\Theta\min_{M_\vartheta}\omega(\vartheta,x^0[\vartheta],m)\leqslant$$
$$\leqslant\inf_{\{x_{\mathcal{U},\mathcal{V}^0}[t]\}}\min_\Theta\min_{M_\vartheta}\omega(\vartheta,x_{\mathcal{U},\mathcal{V}^0}[\vartheta],m), \tag{16}$$

каковы бы ни были стратегии $\mathcal{U},\mathcal{V}$.

Пусть выполняются условия 1 и 3. Тогда с учетом теорем 1 и 3 аналогично ([6]) доказывается следующая

Теорема 4. *Стратегии* $(\mathcal{U}^0,\mathcal{V}^0)$, *экстремальные соответственно к множествам* $\mathcal{W}_\varepsilon$ *и* $\tilde{\mathcal{W}}_\varepsilon$, *где* $\varepsilon=\varepsilon^0(t_0,x_0)$, *разрешают задачу* 1 *при условии* $\omega_0<\varepsilon<\omega^0$, *причем на всяком движении* $x^0[t]=x_{\mathcal{U}^0,\mathcal{V}^0}[t]$

$$\min_\Theta\min_{M_\vartheta}\omega(\vartheta,x^0[\vartheta],m)=\varepsilon. \tag{17}$$

Приведем пример, показывающий, что условие 1.2) существенно в теоремах 1 и 4:

$$dx/dt=u-v, \quad t_0=0, \quad x_0=0, \quad |u|\leqslant\mu, \quad |v|\leqslant\nu, \quad \nu>2\mu,$$

$$\Theta=\{\vartheta_0\}, \quad \omega(\vartheta_0,x,m)=|x-m|,$$

$$M_{\vartheta_0}=\{m:\ m\geqslant m_0\}\cup\{m:\ m\leqslant -m_0\}, \quad m_0>\mu\vartheta_0. \tag{18}$$

Автор выражает благодарность акад. Н. Н. Красовскому за постановку задачи и ценные советы.

Институт математики и механики
Уральского научного центра Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
3 IX 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. Н. Красовский*, Игровые задачи о встрече движений, М., 1970. [2] *В. Д. Батухтин, Н. Н. Красовский*, Техн. кибернетика, № 6, 35 (1972). [3] *Б. Н. Пшеничный*, Кибернетика, т. 1, 47 (1966). [4] *Л. С. Понтрягин*, УМН, т. 21, в. 4, 219 (1966). [5] *Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский и др.*, Математическая теория оптимальных процессов, М., 1961. [6] *Н. Н. Красовский, А. И. Субботин*, ПММ, т. 34, в. 6, 1005 (1970). [7] *А. Г. Ченцов*, ДАН, т. 213, № 2 (1973).