Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 3

УДК 517.945

МАТЕМАТИКА

В. Ю. ЛЯПИДЕВСКИЙ

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 17 VII 1973)

Вопросам существования и единственности обобщенного решения задачи Коши в целом для нелинейных гиперболических систем уравнений посвящен ряд работ, для различных гиперболических систем и классов начальных функций обобщенные решения задачи Коши построены в работах [1-4]. Имеющиеся же теоремы единственности обобщенных решений задачи Коши справедливы, как правило, в гораздо более узких классах разрывных функций, чем классы функций, в которых можно гарантировать существование обобщенного решения задачи Коши для достаточно широкой совокупности начальных данных. Так, в основном, теоремы единственности доказаны в предположении о том, что решение имеет конечное число кусочно-гладких линий разрывов и особенностей типа центрированных волн разрежения [5]. Однако для нелинейных гиперболических систем известны решения, в которых даже из гладких начальных данных за конечное время развивается бесконечное число указанных особенностей. Поэтому представляет интерес изучение обобщенных решений систем гиперболического типа, в которых число линий разрывов и особенностей типа центрированных волн разрежения не ограничено. Особый интерес вызывают такие совокупности обобщенных решений, в которых для достаточно широкого класса начальных условий обобщенное решение задачи Коши существует и единственно.

В работе строится один из таких классов разрывных функций и в этом классе доказывается единственность обобщенного решения задачи Коши, построенного в работе [1] для системы уравнений

$$\begin{aligned} &\partial u/\partial t+\partial p(v)/\partial x=0,\\ &\partial v/\partial t-\partial u/\partial x=0, \end{aligned} \qquad (1)$$

где функция $p(v)\in C^2(0, \infty)$, $p'(v)<0$, $p''(v)>0$.

Под обобщенным решением системы (1) будем понимать ограниченную измеримую функцию $(u(t, x), v(t, x))$, удовлетворяющую при $t>0$ системе (1) в смысле теории распределений.

Через K обозначим класс функций $(u(t, x), v(t, x))$, определенных в полосе $\Pi_T=[0, T]\times(-\infty, \infty)$, принадлежащих пространству $BV(\Pi_T)$ функций, обобщенные первые производные которых локально являются мерами (см. [6]), и таких, что $\inf\limits_{\Pi_T} v(t, x)>0$ и почти во всех точках (t, x_1), (t, x_2) полосы Π_T при $x_1<x_2$ выполнено соотношение

$$-(v_2-v_1)\left[-\frac{p(v_2)-p(v_1)}{v_2-v_1}\right]^{1/2}\leqslant u_2-u_1\leqslant\int\limits_{v_1}^{v_2}[-p'(v)]^{1/2}\,dv, \qquad (2)$$

где $(u_i, v_i)=(u(t, x_i), v(t, x_i))$, $i=1, 2$.

Заметим, что из принадлежности функций класса K пространству $BV(\Pi_T)$ следует, что для обобщенного решения $(u, v)\in K$ системы (1) существует потенциал решения (Φ, Ψ), удовлетворяющий в полосе Π_T

условию Липшица по двум переменным и в точках непрерывности функций (u, v) — нелинейной системе

$$\begin{gathered}\partial\Phi(t, x)/\partial t+p(\partial\Psi(t, x)/\partial x)=0,\\ \partial\Psi(t, x)/\partial t-\partial\Phi(t, x)/\partial x=0, \\ \partial\Phi(t, x)/\partial x=u(t, x), \quad \partial\Psi(t, x)/\partial x=v(t, x).\end{gathered} \tag{3}$$

Кроме того, можно считать, что $\Phi(0, 0)=0$, $\Psi(0, 0)=0$.

Мы говорим, что обобщенное решение $(u, v)\in K$ системы (1) принимает в качестве начальных данных значения $(u_0(x), v_0(x))$, если

$$\Phi(0, x)=\int_0^x u_0(x)\,dx, \qquad \Psi(0, x)=\int_0^x v_0(x)\,dx.$$

Важно отметить, что для любой ограниченной функции $(u_0(x), v_0(x))$, удовлетворяющей соотношению (2), существует обобщенное решение $(u, v)\in K$ системы (1), имеющее в качестве начальных данных функцию $(u_0(x), v_0(x))$ (см. ([1])).

Ниже будет показано, что обобщенное решение задачи Коши для системы (1) единственно в классе K. Рассмотрим сначала случай, когда обобщенное решение мало отличается от постоянного. Фиксируем постоянное решение (U_0, V_0) системы (1), $V_0>0$. Пусть K_h означает множество функций из K таких, что

$$\sup_{\Pi_T} |(u(t, x) v(t, x))-(U_0, V_0)|\leqslant h.$$

Условимся буквами L, M, возможно, с индексами, обозначать постоянные, зависящие от выбора точки (U_0, V_0) и свойств функции $p(v)$ в некоторой окрестности точки V_0.

Справедлива следующая теорема о непрерывной зависимости от начальных условий обобщенных решений системы (1).

Теорема 1. *Существуют такие постоянные $h>0$, M, что для разности потенциалов $(\tilde\Phi, \tilde\Psi)=(\Phi-\bar\Phi, \Psi-\bar\Psi)$ обобщенных решений (u, v), $(\bar u, \bar v)\in K_h$ справедлива оценка*

$$\sup_{\Pi_T} |(\tilde\Phi(t, x), \tilde\Psi(t, x))|\leqslant M\sup_x |(\tilde\Phi(0, x), \tilde\Psi(0, x))|. \tag{4}$$

Доказательство. Оценка (4) получается при помощи обычного приема сведения нелинейной системы (3) к линейной системе с разрывными коэффициентами и оценки решений полученной системы вдоль характеристик этой системы.

Пусть обобщенные решения (u, v), $(\bar u, \bar v)$ системы (1) принадлежат классу K_h. Тогда разность соответствующих потенциалов $(\tilde\Phi, \tilde\Psi)=(\Phi-\bar\Phi, \Psi-\bar\Psi)$ решений (u, v), $(\bar u, \bar v)$ удовлетворяет в точках непрерывности этих решений системе

$$\begin{gathered}\partial\tilde\Phi(t, x)/\partial t-a^2(t, x)\,\partial\tilde\Psi(t, x)/\partial x=0,\\ \partial\tilde\Psi(t, x)/\partial t-\partial\tilde\Phi(t, x)/\partial x=0,\end{gathered} \tag{5}$$

$$a(t, x)=\begin{cases}\left[-\dfrac{p(v(t, x))-p(\bar v(t, x))}{v(t, x)-\bar v(t, x)}\right]^{1/2}, & v(t, x)\neq\bar v(t, x),\\ [-p'(v(t, x))]^{1/2}, & v(t, x)=\bar v(t, x).\end{cases}$$

Заметим, что функции из K представляют собой классы эквивалентности по двумерной мере Лебега. Поэтому в качестве представителя класса эквивалентности выбираем функцию, равную аппроксимативному пределу функций из рассматриваемого класса в тех точках, где такой предел существует (см. ([6])).

Лемма. *Пусть точка* $(\tau, y)\in\Pi_T$. *Тогда существуют абсолютно непрерывные функции* $x=x^\pm(t)$, *определенные на промежутке* $[0,\tau]$, *такие, что* $y=x^\pm(\tau)$, *и обладающие следующими свойствами:*

а) *функции* (u,v), $(\bar u,\bar v)$ *для почти всех* $t\in[0,\tau]$ *непрерывны в точках* $(t,x^\pm(t))$ *и*

$$dx^\pm(t)/dt=\pm a(t,x^\pm(t));$$

б) *для достаточно малых* $h>0$ *справедлива оценка*

$$\operatorname*{Var}_{(0,\tau)} v(t,x^\pm(t))+\operatorname*{Var}_{(0,\tau)} \bar v(t,x^\pm(t))\leqslant Lh.$$

Записывая систему (5) в характеристической форме и интегрируя ее вдоль кривых $\{(t,x^\pm(t))\}$, приходим к оценке функций в точках $(\tau,y)\in\Pi_T$

$$|(\tilde\Phi(\tau,y),\tilde\Psi(\tau,y))|\leqslant M_1(W_0+WLh),$$

$$W_0=\sup_x|(\tilde\Phi(0,x),\tilde\Psi(0,x))|,\quad W=\sup_{\Pi_T}|(\tilde\Phi(t,x),\tilde\Psi(t,x))|.$$

Поэтому справедлива оценка

$$W\leqslant M_1(W_0+WLh),$$

из которой при достаточно малом $h>0$ получаем (4). Теорема доказана.

Остановимся подробнее на утверждениях леммы. Для любой точки (τ,y) полосы Π_T в качестве функций $x=x^\pm(t)$ можно выбрать верхние или нижние решения уравнений (см. ([7]))

$$dx/dt=\pm a(t,x).$$

При этом выполнение свойства а) проверяется на основе изучения структуры разрывов решений из класса K (см. ([8])). Основную трудность представляет получение оценки б).

Замечание. Пусть для $\tau\in[0,T]$ функция $(u(\tau,x),v(\tau,x))$ удовлетворяет соотношению (2). Тогда, как показано в ([1]), для любого $\varepsilon>0$ при $t\geqslant\tau$ существует обобщенное решение $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\in K$ системы (1), состоящее из конечного числа волн разрешения одного семейства, конечного числа кусочно-гладких линий разрыва другого семейства и такое, что

$$\sup_x|(u(\tau,x),v(\tau,x))-(u_\varepsilon(\tau,x),v_\varepsilon(\tau,x))|\leqslant\varepsilon.$$

Поэтому оценку (4) достаточно получить в том случае, когда одно из решений, например $(\bar u(t,x),\bar v(t,x))$, принадлежит K и содержит конечное число указанных выше особенностей. Пусть, например, функция $x=x(t)=x^-(t)$ обладает на интервале $(0,\tau)$ свойством а). Введем в рассмотрение инвариант Римана

$$r(u,v)=u-\int_{V_0}^{v}[-p'(v)]^{1/2}\,dv.$$

Обозначим через $V(t)$, $R(t)$ значения функций $v, r(u,v)$ вдоль кривой $\{(t,x(t))\}$, $t\in[0,\tau]$. Аналогично определяются функции $\bar V(t)$, $\bar R(t)$. Заметим, что функции $R(t)$, $\bar R(t)$ не убывают. Пусть F — множество точек $t\in(0,\tau)$ таких, что функции (u,v), $(\bar u,\bar v)$ непрерывны в точках $(t,x(t))$ и $V(t)\neq\bar V(t)$. Для каждой точки $t\in F$ существует число q_t со свойством: на множестве $(t-q_t,t+q_t)\cap F$ разность $V(s)-\bar V(s)$ сохраняет знак. Пусть $G=\bigcup\limits_{t\in F}(t-q_t,t+q_t)$. Множество G открыто. Представим его в виде объединения не более чем счетного числа непересекающихся интервалов $G=\bigcup(\alpha_i, \beta_i)\cup(0, \beta_0)\cup(\alpha_\tau, \tau)$. Справедливы следующие оценки:

$$\operatorname*{Var}_{(\alpha_i, \beta_i)} V(t)+\operatorname*{Var}_{(\alpha_i, \beta_i)} \overline{V}(t)\leqslant L_1(R(\beta_i+0)-R(\alpha_i-0)+\overline{R}(\beta_i+0)-\overline{R}(\alpha_i-0)),$$

$$\operatorname*{Var}_{(0, \beta_0)\cup(\alpha_\tau, \tau)} V(t)+\operatorname*{Var}_{(0, \beta_0)\cup(\alpha_\tau, \tau)} \overline{V}(t)\leqslant L_2h.$$

Множество точек $t\in[0, T]$, в которых $\overline{R}(t+0)\neq\overline{R}(t-0)$, конечно. Пусть это множество $\{t_1, \ldots, t_N\}$ и $0=t_0<t_1<\ldots<t_N<t_{N+1}=\tau$. Тогда на каждом замкнутом подмножестве интервала (t_i, t_{i+1}), $i=0, \ldots, N$, функция $\overline{V}(t)$ удовлетворяет условию Липшица. Поэтому

$$\operatorname*{Var}_{(0,\tau)}\overline{V}(t)\leqslant\int_0^\tau|\overline{V}'(t)|dt+L_3\sum_{i=1}^N|\overline{R}(t_i-0)-\overline{R}(t_i+0)|.$$

Но почти во всех точках множества $[0, T]\setminus G$ имеем $\overline{V}'(t)=0$. Таким образом,

$$\operatorname*{Var}_{(0,\tau)}\overline{V}(t)\leqslant\sum_i\operatorname*{Var}_{(\alpha_i,\beta_i)}\overline{V}(t)+\operatorname*{Var}_{(0,\beta_0)\cup(\alpha_\tau,\tau)}\overline{V}(t)+L_3\sum_{i=1}^N|\overline{R}(t_i-0)-\overline{R}(t_i+0)|\leqslant$$
$$\leqslant(L_1+L_3)(\overline{R}(\tau)-\overline{R}(0))+L_2h\leqslant L_4h.$$

Вариацию функции $V(t)$ можно оценить следующим образом:

$$\operatorname*{Var}_{(0,\tau)}V(t)\leqslant\operatorname*{Var}_{(0,\tau)}\overline{V}(t)+\sum_i\operatorname*{Var}_{(\alpha_i,\beta_i)}V(t)+\operatorname*{Var}_{(0,\beta_0)\cup(\alpha_\tau,\tau)}V(t)\leqslant Lh,$$

и свойство б) для функции $x=x^-(t)$ установлено. Оценка вариаций функций (u, v), $(\overline{u}, \overline{v})$ вдоль кривой $\{t, x^+(t)\}$ получается аналогично.

Применяя методы доказательства единственности решения задачи Коши для системы (1) в классе разрывных функций, содержащих конечное число особенностей (см. ([5])), и полученные выше оценки, можно показать, что справедлива

Теорема 2. *Обобщенное решение задачи Коши в классе K единственно.*

Заметим, что условие устойчивости обобщенного решения системы (1) может быть записано в виде: почти во всех точках (t, x) полосы Π_T выполнено неравенство $u(t, x+0)\leqslant u(t, x-0)$. Справедливость этого соотношения для решений из K установлена в ([8]).

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
4 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Zhang Tong, Guo Yu-Fa,* Acta Math. Sin., v. 15, 3 (1965). [2] *J. A. Smoller, J. L. Johnson,* Arch. Rat. Mech. Anal., v. 32, 3 (1969). [3] *J. Glimm,* Comm. Pure Appl. Math., v. 18, 4 (1965). [4] *T. Nishidia,* Proc. Japan. Acad., v. 44, 642 (1968). [5] *Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко,* Системы квазилинейных уравнений, «Наука», 1968. [6] *А. И. Вольперт,* Матем. сборн., т. 73, 2 (1967). [7] *А. Ф. Филиппов,* Матем. сборн., т. 51, 1, 99 (1960). [8] *В. Ю. Ляпидевский,* Сборн. Динамика сплошной среды, в. 13 (1973).