Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 3

МАТЕМАТИКА

Х. Х. МУРТАЗИН

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 13 VII 1973)

В настоящей заметке получены оценки решений уравнений

$$-\Delta u(x)-z^2u(x)=h(x), \quad x\in D, \quad u(x)|_\Gamma=0 \tag{1}$$

в зависимости от $h(x)$ и параметра z. Здесь $D\subset R_n$, Γ — граница D. Предполагается, что либо $D=R_n$, либо D есть внешность звездного (вообще говоря, неограниченного) препятствия в R_n, определяемая следующим образом. Пусть $x=(r,w)$, $r=|x|$, $w=x/|x|$, $\theta(w)\geqslant 0$ — в области W поверхности S_n единичной сферы $|x|\leqslant 1$ в R_n. Тогда

$$D=\{x: x=(r,w),\ \theta(w)\leqslant r<\infty,\ w\in W\}. \tag{2}$$

Очевидно, область (2) есть либо внешность ограниченного препятствия, либо финитное возмущение телесного угла, либо квазиконическая область в R_n.

1. Основной результат. Отметим, что если

$$h\in\mathscr{L}_2(D), \quad \operatorname{Im} z>0,$$

то уравнение (1) имеет единственное решение в классе $\mathscr{L}_2(D)$. Оно имеет вид

$$u(x,z)=\int\limits_D \mathring{R}(x,y,z)h(y)\,dy, \tag{3}$$

где $\mathring{R}(x,y,z)$ — ядро оператора $\mathring{R}_z=(L_0-z^2I)^{-1}$,

$$L_0u=-\Delta u(x), \quad u(x)|_\Gamma=0.$$

Теорема 1. *Пусть либо $D=R_n$, либо D определяется формулой (2), причем*

$$r_0\leqslant\theta(w)\leqslant R_0, \tag{4}$$

где $0<r_0<R_0$ постоянные.

Тогда, если

$$\|h\|_1^2=\int\limits_D (1+|x|)^{1+\varepsilon}|h(x)|^2\,dx<\infty \tag{5}$$

при некотором $\varepsilon>0$, то функция $u(x,z)$ допускает продолжение на вещественную ось $\operatorname{Im} z=0$ $(z\neq 0)$, причем для всех $z\neq 0$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$

$$\int\limits_{|y|\leqslant|x|,\ x\in D} |u(y,z)|^2\,dy\leqslant C_1(\varepsilon)|z|^{-2}|x|\,\|h\|_1^2, \tag{6}$$

$$\|u(z)\|_2^2=\int\limits_D (1+|x|)^{-1-\varepsilon}|u(x,z)|^2\,dx\leqslant C_2(\varepsilon)|z|^{-2}\|h\|_1^2, \tag{7}$$

где $C_1(\varepsilon)>0$, $C_2(\varepsilon)>0$ зависят лишь от $\varepsilon>0$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $D\neq R_n$, $n\geqslant 3$. Пусть

$$f(x)=f(r,w)=\begin{cases}\cos^2 \pi r/2\theta(w), & r_0\leqslant r\leqslant\theta(w),\\ 0, & r>\theta(w),\end{cases}$$

при фиксированном $w \in W$. Рассмотрим последовательность краевых задач в области $\{x: |x| \geqslant r_0, w \in W\}$

$$-\Delta u_m + mfu_m - z^2 u_m = h_1(x), \quad u_m|_{|x|=r_0} = 0, \tag{8}$$

предполагая, что $u_m(x, z) \in \mathscr{L}_2$ при $\operatorname{Im} z > 0$

$$h_1(x) = \begin{cases} h(x), & x \in D, \\ 0, & x \notin D. \end{cases} \tag{9}$$

Обозначим $\hat{u}_m = r^{(n-1)/2} u_m$, $\hat{h}_1 = r^{(n-1)/2} h$. Тогда в полярных координатах

$$-(\hat{u}_m(r, w))''_{rr} + \frac{A_w \hat{u}_m(r, w)}{r^2} + mf(r, w)\hat{u}_m(r, w) - z^2 \hat{u}_m(r, w) = \hat{h}(r, w), \tag{10}$$

$$\hat{u}(r_0, w) = 0, \tag{11}$$

где $A_w \geqslant \alpha > 0$ — оператор в $H = \mathscr{L}_2(W, dw)$ с дискретным спектром. Допустим, что $h(x)$ — финитная функция. Тогда решение задачи (10), (11) допускает продолжение на вещественную ось, причем при $\operatorname{Im} z = 0$ $(z \neq 0)$

$$\|\hat{u}_m'(r, z) - iz\hat{u}_m(r, z)\|_H \xrightarrow[r \to \infty]{} 0, \tag{12}$$

$$\|\cdot\|_H \text{ — норма в } H, \quad \hat{u}_m' = \frac{\partial}{\partial r} \hat{u}_m(r, w).$$

Непосредственное вычисление показывает, что при $\operatorname{Im} z = 0$ из (10), (11) следуют

$$\|\hat{u}_m'(r)\|_H^2 + z^2 \|\hat{u}_m(r)\|_H^2 = \|\hat{u}_m'(r_0)\|_H^2 + \frac{A_w(\hat{u}_m(r), \hat{u}_m(r))_H}{r^2} +$$

$$+ m(f(r)\hat{u}_m(r), \hat{u}_m(r))_H + 2\int_{r_0} \frac{(A_w u_m(t), u_m(t))_H}{t^3} dt -$$

$$-m \int_{r_0}^{r} (f'(t)\hat{u}_m(t), \hat{u}_m(t))_H \, dt - 2\operatorname{Re} \int_{r_0}^{r} (\hat{u}_m'(t), h(t))_H \, dt, \tag{13}$$

$$\|\hat{u}_m'(r)\|_H^2 + z^2 \|\hat{u}_m(r)\|_H^2 = \|\hat{u}_m'(r) - iz\hat{u}_m(r)\|_H^2 - 2iz \operatorname{Im} \int_{r_0}^{r} (h(t), u(t))_H \, dt, \tag{14}$$

где $(\cdot, \cdot)_H$ — скалярное произведение в H, $f' = \partial f / \partial t$.

Из (12)—(14) вытекает (при $r \to +\infty$)

$$\|\hat{u}_m'(r_0)\|_H^2 + 2\int_{r_0}^{\infty} t^{-3}(A_w \hat{u}_m(t), \hat{u}_m(t))_H \, dt - m\int_{r_0}^{R_1} (f'(t)\hat{u}_m(t), \hat{u}_m(t))_H \, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\|h\|_1 \left(\int_{r_0}^{\infty} \|u_m'(t)\|_H^2 (1+t)^{-1-\varepsilon} dt\right)^{1/2} + |z| \left(\int_{r_0}^{\infty} (1+t)^{-1-\varepsilon} \|\hat{u}_m(t)\|_H^2 dt\right)^{1/2}. \tag{15}$$

Так как $(f(r)\hat{u}_m(r), \hat{u}_m(r))_H \leqslant -C_0 (f'(r)\hat{u}_m(r), \hat{u}_m(r))_H$ при некотором $C_0 > 0$, то из (13), (15) получим

$$\int_{r_0}^{\infty} (1+t)^{-1-\varepsilon} [\|\hat{u}_m'(t)\|_H^2 + z^2 \|\hat{u}_m(t)\|_H^2] dt \leqslant C(\varepsilon) \cdot \|h\|_1^2, \tag{16}$$

$$\int_N^\infty (1+t)^{-1-\varepsilon}[\|\hat{u}_m'(t)\|_H^2+z^2\|\hat{u}_m(t)\|_H^2]\,dt\leqslant\frac{C(\varepsilon)}{N^\varepsilon}\|h\|_1^2, \qquad (17)$$

где $C(\varepsilon)>0$ зависит лишь от $\varepsilon>0$. Поэтому оценки (15)—(17) справедливы для всех $h(x)$ с конечной нормой $\|h\|_1$. Теперь, используя дискретность спектра оператора A_w и оценки (15)—(17), убеждаемся в том, что последовательность $u_m(x,z)$ компактна в норме $\|\cdot\|_2$, причем при $m\to+\infty$

$$\int_{r_0}^{R_0} r^{n-1}\int_W f(r,w)\,|u_m(r,w)|^2\,dw\,dr\leqslant\frac{2C_0\sqrt{C(\varepsilon)}}{m}\|h\|_1^2, \qquad (18)$$

откуда вытекает справедливость формулы (7) для $z\neq0$, $\operatorname{Im}z=0$. Если $h(x)$ финитна, то легко показать, что при любом $\beta<1$ и фиксированных m и x

$$|u_m(x,z)z^\beta|\xrightarrow[|z|\to\infty]{}0$$

равномерно в полуплоскости $\operatorname{Im}z\geqslant0$, откуда следует справедливость (7) для всех $z\neq0$, $\operatorname{Im}z\geqslant0$ из принципа максимума модуля для аналитических функций. Формула (6) доказывается аналогично.

Теорема 2. *Пусть D — произвольная квазиконическая область вида* (2),

$$\|h\|_3^2=\int_D(1+|x|)^3\,|h(x)|^2\,dx<\infty.$$

Тогда $u(x,z)$ существует для всех $z\neq0$, $\operatorname{Im}z\geqslant0$, причем

$$\|u(z)\|_4^2=\int_D(1+|x|)^{-3}\,|u(x,z)|^2\,dx\leqslant C_3(1+|z|)\,\|h\|_3,$$

где $C_3>0$ не зависит от $h(x)$ и z.

Доказательство. Пусть последовательность D_k сужающихся областей вида (2), где

$$\theta_k(w)=\begin{cases}\theta(w), & \theta(w)<k,\\ k, & \theta(w)\geqslant k;\end{cases}$$

рассмотрим последовательность краевых задач (1) в области D_k с правыми частями

$$h_k(x)=\begin{cases}h(x), & x\in D,\\ 0, & x\notin D.\end{cases}$$

Тогда к ним применимы рассуждения, приведенные выше. Используя формулы (12)—(14) и соотношение

$$\int_{r_0}^\infty\frac{\|u'(r)\|_H^2}{(1+r)^3}dr+\int_{r_0}^\infty\frac{(Au(r),u(r))_H}{(1+r)^3r^3}dr+\int_{r_0}^\infty\frac{(f_m(r)u(r),u(r))_H}{(1+r)^3}dr=$$

$$=z^2\int_{r_0}^\infty\frac{\|u(r)\|_H^2}{(1+r)^3}dr+6\int_{r_0}^\infty\frac{\|u(r)\|_H^2}{(1+r)^5}+\operatorname{Re}\int_0^\infty(h(r),u(r))_H\,dr$$

для решения задачи вида (8) в случае области D_k, получим, что последовательность $u_k(x,z)$ (решений задачи (1) в области D_k) компактна в норме $\|\cdot\|_4$, причем

$$\|u_k\|_4\leqslant C_3(1+|z|)\,\|h\|_3,\qquad \operatorname{Im}z\geqslant0,$$

где $C_3>0$ не зависит от k и z, откуда вытекает доказательство теоремы, если применить процесс предельного перехода по $k>0$.

Теорема 3. *Пусть либо $D=R_n$, либо D — область вида* (2), *где* $\theta(w)\equiv0$, $h(x)$ — *финитная функция из* $\mathscr{L}_2(D)$, *причем* $\operatorname{supp}h(x)\subset\{x: |x|\leqslant R\}$.

Тогда решение (3) *задачи* (1) *допускает аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость* $\operatorname{Im} z<0$ (*в общем случае* $\operatorname{Re} z\neq 0$), *причем при* $z\neq 0$, $\operatorname{Im} z<0$

$$\int\limits_{|x|\leqslant R,\ x\in D} |u(x,z)|^2\,dx \leqslant \frac{C_4 e^{2|\operatorname{Im} z|R}}{|z|^2}\|h\|^2_{\mathscr{L}_2},$$

где $C_4>0$ *не зависит от* z *и* h.

Доказательство проводится с использованием формул вида (15)—(17) (при $\operatorname{Im} z=0$) и принципа максимума модуля для аналитических функций.

Из теорем 1—3 вытекают следствия: 1) при условиях теоремы 1

$$\overset{\circ}{R}(x,y,z)=\frac{e^{iz||x|-|y||}}{|z|}(1+|x|)^{1/2+\varepsilon}(1+|y|)^{1/2+\varepsilon}G(x,y,z), \tag{19}$$

где $G(x,y,z)$ при $z\neq 0$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ есть ядро вполне непрерывного оператора, причем $\|G_z\|\leqslant C_0$, где $C_0>0$ не зависит от z; 2) при условиях теоремы 3 ядро $\overset{\circ}{R}(x,y,z)$ при $\operatorname{Im} z<0$ допускает представление вида (19) для всех x, y, $|x|$, $|y|\leqslant R$.

Замечания. 1) Менее точный результат получен автором в ([2]) для телесных углов; 2) утверждения теоремы 1 и 3 неулучшаемы даже в случае $D=R_1$, как это видно из формулы

$$u(x,z)=\frac{i}{2z}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iz|x-y|}h(y)\,dy.$$

2. Некоторые приложения. Теоремы 1—3 и их следствия позволяют применить методы теории возмущений для изучения спектральных свойств лапласиана и его возмущений в квазиконических областях вида (2). Например, справедливы следующие утверждения.

1°. Пусть $q(x)$ — комплекснозначная функция, $|q(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-1-\varepsilon}$, $C>0$, $\varepsilon>0$. Тогда при условиях теоремы 1 дискретный спектр несамосопряженного оператора $L=L_0+q$ ограничен и не имеет предельных точек вне полуоси $(0,\infty)$. Если же $\operatorname{Im} q(x)\equiv 0$, то положительный спектр оператора L абсолютно непрерывен.

2°. Пусть D — любая квазиконическая область вида (2). Тогда спектр оператора L_0 совпадает с полуосью $(0,\infty)$ и абсолютно непрерывен, причем абсолютно непрерывный спектр устойчив относительно возмущений $q(x)$, удовлетворяющих условию $q(x) \underset{|x|\to\infty}{\approx} O(|x|^{-3})$.

3°. Пусть $q(x)$ — финитная функция, D удовлетворяет условию теоремы 3. Тогда ядро $R(x,y,z)$ оператора $(L-z^2I)^{-1}$ допускает аналитическое продолжение в область $\operatorname{Im} z<0$ как мероморфная функция, причем при больших $|z|$ полюсы $R(x,y,z)$ расположены ниже некоторой кривой вида

$$\operatorname{Im} z=-a_0-a_1\ln|z|,\quad a_0>0,\quad a_1>0.$$

Замечания. 1) Относительно характера спектра оператора L_0 в квазиконических областях вида (2), расположенных в полупространстве, ранее было лишь известно отсутствие положительных собственных значений (см. теорему Ф. Реллиха в ([1]), стр. 249); 2) утверждение 3° можно также вывести из оценок цилиндрических функций, полученных ранее автором (см. ([2])); 3) из теорем 1—3 вытекают также сведения об асимптотике собственных функций непрерывного спектра оператора L_0 и его возмущений в областях вида (2).

Башкирский государственный университет
им. 40-летия Октября
Уфа

Поступило
13 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. М. Глазман*, Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, 1963. [2] *Х. Х. Муртазин*, ДАН, т. 196, № 1, 44 (1971).