Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 3

УДК 519.45 МАТЕМАТИКА

Л. Г. МУСТАФАЕВ

ПОЛУГРУДЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 20 VII 1973)

1. Характеристике топологических пространств посредством различных полугрупп и групп их преобразований (непрерывных, гомеоморфных, замкнутых) посвящены работы ([4–14]). Л. Б. Шнеперманом ([10]) указан широкий класс топологических пространств, которые полностью характеризуются полугруппами всех своих непрерывных преобразований, в частности, в работе ([11]) им установлено, что ограниченное метрическое пространство, содержащее простую дугу, с точностью до гомеоморфизма характеризуется алгебраической полугруппой всех своих непрерывных преобразований.

Цель настоящей работы — выявить, насколько полно полугруда всех пар непрерывных отображений двух метрических пространств друг в друга характеризует эти метрические пространства.

В работе установлено, что пара ограниченных метрических пространств, содержащих простую дугу, полностью характеризуется алгебраической полугрудой всех пар непрерывных отображений этих пространств друг в друга (п. 16). Получена абстрактная характеристика топологической полугруды всех пар непрерывных отображений двух ограниченных метрических пространств друг в друга (п. 12), а для случая ограниченных метрических пространств, содержащих простую дугу, и как алгебраической полугруды (п. 18).

2. П о л у г р у д о й ([2], [3]) называется множество S, в котором определена тернарная алгебраическая операция, ставящая в соответствие каждой тройке элементов $s_i\in S$ элемент $[s_1s_2s_3]\in S$, причем

$$[[s_1s_2s_3]s_4s_5]=[s_1[s_4s_3s_2]s_5]=[s_1s_2[s_3s_4s_5]],\qquad s_i\in S.$$

Пусть Ω_1 и Ω_2 — два множества. Через $S(\Omega_i)$ обозначим множество всех отображений Ω_i в Ω_j, где $i, j=1, 2, i\neq j$.

В множестве $S=S(\Omega_1, \Omega_2)=S(\Omega_1)\times S(\Omega_2)$ всех пар отображений (φ, ψ), где $\varphi\in S(\Omega_1)$, $\psi\in S(\Omega_2)$, введем тернарную операцию:

$$[(\varphi_1, \psi_1)(\varphi_2, \psi_2)(\varphi_3, \psi_3)]=(\varphi_3\circ\psi_2\circ\varphi_1, \psi_1\circ\varphi_2\circ\psi_3).$$

Относительно этой операции (скрещенного тройного умножения пар отображений) множество S является полугрудой.

3. Все необходимые сведения из теории полугруд можно найти в работах ([2], [3]), а из теории метрических и топологических пространств — в ([1]).

4. Через S_ρ будем обозначать полугруду S, на множестве элементов которой определена топология ρ. Полугруду S_ρ будем называть т о п о л о г и ч е с к о й, если действие, определенное в полугруде, непрерывно относительно топологии ρ. Если топология на множестве элементов полугруды S порождается метрикой d, то обозначим эту полугруду через S_d. Топологическую полугруду S_d назовем м е т р и ч е с к о й, если действие, определенное в полугруде, непрерывно относительно этой метрики. Полугруду назовем а н т и к о м м у т а т и в н о й, если любая пара элементов ее регулярно сопряжена ([15]). Любой паре a, b элементов полугруды S соответствует преобразование $\delta_{a,b}(x)=[axb]$, $x\in S$. Это преобразование естественно

назвать латеральным сдвигом полугруды S. Пусть C — подмножество полугруды S. Элементы a, $b \in S$ назовем бiравнодействующими на C, если $[aca]=[bcb]$ для любого $c \in C$.

5. Идеал H_d полугруды S_d назовем *q*-идеалом, если для любых a, $b \in S$

$$d(a, b) = \sup_{h \in H} d([aha], [bhb]).$$

В пп. 6—8 и 12 речь будет идти о непрерывных гомоморфизмах и топологических изоморфизмах.

6. Пусть K — категория всех метрических полугруд и σ — бинарное отношение в категории K. Полугруду B_d такую, что $A_d \sigma B_d$ и $A_d \subseteq B_d$ будем называть σ-расширением полугруды A_d *. σ-Расширение B_d полугруды A_d назовем плотным, если всякий гомоморфизм f полугруды B_d, являющийся изометрией на A_d и удовлетворяющий условию $(fA_d)\sigma(fB_d)$, будет изоморфизмом. Плотное σ-расширение M_d полугруды A_d называется максимальным, если для всякого σ-расширения B_d полугруды A_d из $M_d \subseteq B_d$ следует $M_d = B_d$. Плотное σ-расширение M_d полугруды A_d называется универсальным, если: 1) для всякого плотного σ-расширения B_d полугруды A_d существует изоморфизм в M_d, тождественный на A_d, и 2) всякий эндоморфизм полугруды M_d, тождественный на A_d, является тождественным автоморфизмом.

7. В категории K всех метрических полугруд введем бинарное отношение q: $A_d q B_d$ тогда и только тогда, когда A_d — q-идеал B_d (см. п. 5). Всякое q-расширение является плотным. Если H_d-компактная метрическая антикоммутативная полугруда, то в категории K существует с точностью до изоморфизма единственное универсальное q-расширение $\mathfrak{M}_d$ полугруды H_d. Универсальное q-расширение $\mathfrak{M}_d$ полугруды H_d является максимальным.

8. Теорема. *Если антикоммутативная топологическая полугруда компактна и метризуема, то при любом способе метризации максимальные q-расширения соответствующих метрических полугруд изоморфны.*

9. Всюду ниже Ω_1 и Ω_2 — ограниченные метрические пространства, $S = S(\Omega_1, \Omega_2)$ — множество всех пар отображений пространств Ω_1 и Ω_2 друг в друга (см. п. 2); $G = G(\Omega_1, \Omega_2)$ — подмножество S, состоящее из всех пар непрерывных отображений; $H = H(\Omega_1, \Omega_2)$ — подмножество G, состоящее из всех пар константных отображений. S является полугрудой относительно операции скрещенного тройного умножения пар отображений (см. п. 2), а G и H — ее подполугруды. H — минимальный идеал полугруды S.

Пусть d_1 и d_2 — метрики пространств Ω_1 и Ω_2 соответственно. В $\Omega_1 \times \Omega_2$ определим метрику d: для любых (α_1, β_1), (α_2, β_2) из $\Omega_1 \times \Omega_2$

$$d\{(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2 \ \beta_2)\} = d_1(\alpha_1, \alpha_2) + d_2(\beta_1, \beta_2).$$

На полугруде S определим метрику d_0:

$$d_0\{(\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2)\} = \sup_{(\eta, \xi) \in \Omega_1 \times \Omega_2} d\{(\psi_1 \xi, \varphi_1 \eta), (\psi_2 \xi, \varphi_2 \eta)\}.$$

Метрика d_0 на S_{d_0} индуцирует метрику, а вместе с ней и топологию ρ_0 на G и H.

10. Лемма. *Топологическое пространство H_{ρ_0} гомеоморфно пространству $\Omega_1 \times \Omega_2$, а метрическая полугруда H_{d_0} является q-идеалом полугруды S_{d_0}.*

11. Теорема. *Если Ω_1 и Ω_2 — компактные метрические пространства, то метрическая полугруда G_{d_0} является максимальным q-расширением полугруды H_{d_0}.*

12. Теорема. *Пусть Ω_1 и Ω_2 — компактные метрические пространства. Топологическая полугруда P_ρ тогда и только тогда изоморфна топо-*

* Здесь используется терминология, предложенная нам Л. М. Глускиным.

логической полугруде G_{ρ_0}, когда топологическая полугруда P_ρ содержит топологическую подполугруду T_ρ, изоморфную топологической полугруде H_{ρ_0}, и топологическая полугруда P_ρ является максимальным q-расширением топологической полугруды T_ρ.

13. Пусть B — идеал полугруды A. Определим семейство Γ подмножеств множества B. $L\in\Gamma$ тогда и только тогда, когда существуют элементы $b\in B$ и u, $v\in A$ такие, что $[uLv]=b$, $[u(B\setminus L)v]\not\ni b$. Если объединение любого конечного числа и пересечение произвольного числа множеств из Γ опять являются множествами из Γ, то, как и в ([11]), назовем B базисным идеалом полугруды A.

Примем Γ за базис замкнутых множеств некоторой топологии σ на B, если B — базисный идеал полугруды A. Договоримся, что если полугруда A содержит минимальный базисный идеал, то соответствующая базису Γ топология будет обозначаться через σ_0.

14. Пусть антикоммутативная полугруда C — минимальный базисный идеал полугруды A и топологическое пространство C_{σ_0} компактно и метризуемо. Если d — такая метрика на C, для любых a, $b\in A$ и любого $L\in\Gamma$ $\delta_{a,b}^{-1}(L)\in\Gamma$ (см. п. 4) и полугруда A не содержит элементов, биравнодействующих на C, то метрику d можно распространить на A: для любых a, $b\in A$

$$d(a,\ b)=\sup_{c\in C} d([aca],\ [bcb]).$$

Можно показать, что эта метрика индуцирует на A топологию, которая не зависит от способа метризации C_{σ_0}. В силу этого, обозначим ее тоже через σ_0. Полугруда A_{σ_0} топологическая.

Всюду ниже в пп. 15—19 Ω_1 и Ω_2 — метрические пространства, содержащие простую дугу.

15. Теорема. *Если Ω_1 и Ω_2 — компактные метрические пространства, то на полугруде $G(\Omega_1, \Omega_2)$ топологии σ_0 и ρ_0 совпадают.*

16. Теорема. *Пусть Ω_1' и Ω_2' — произвольные метрические пространства. Полугруды $G(\Omega_1, \Omega_2)$ и $G'(\Omega_1', \Omega_2')$ изоморфны тогда и только тогда, когда пространства Ω_i и Ω_i' $(i=1, 2)$ гомеоморфны.*

17. Теорема. *Для того чтобы пространства Ω_1 и Ω_2 были связными, необходимо и достаточно, чтобы при любом $a\in G\setminus H$ множество $[aHa]$ было бесконечным.*

18. Теорема. *Пусть Ω_1 и Ω_2 — компактные метрические пространства. Полугруда W тогда и только тогда изоморфна полугруде $G(\Omega_1, \Omega_2)$, когда:*

1) *полугруда W содержит подполугруду F, изоморфную H и являющуюся минимальным базисным идеалом;*
2) *полугруда W не содержит элементов, биравнодействующих на F;*
3) *топологическое пространство F_{σ_0} гомеоморфно пространству H_{σ_0};*
4) *топологическая полугруда W_{σ_0} является максимальным q-расширением топологической полугруды F_{σ_0}.*

19. Автоморфизм f полугруды $G=G(\Omega_1, \Omega_2)$ назовем внутренним, если существуют такие гомеоморфизмы ξ_i пространств Ω_i $(i=1, 2)$ на себя, что

$$\forall(\varphi, \psi)\in G \qquad f(\varphi, \psi)=(\xi_2\varphi\xi_1^{-1},\ \xi_1\psi\xi_2^{-1}).$$

Теорема. *Каждый автоморфизм полугруды $G(\Omega_1, \Omega_2)$ является гомеоморфизмом топологического пространства G_{ρ_0} на себя.*

Теорема. *Все автоморфизмы полугруды $G(\Omega_1, \Omega_2)$ внутренние.*

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность акад. П. С. Александрову, проф. Л. М. Глускину и А. А. Мальцеву за ценные советы и обсуждение работы.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
21 IX 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *П. С. Александров,* Введение в общую теорию множеств и функций, М., 1948. [2] *В. В. Вагнер,* Матем. сборн., т. 32 (74), № 3 (1953). [3] *Л. М. Глускин,* Сборн. Теория полугрупп и ее приложения, 1965. [4] *Л. М. Глускин,* Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 6 (1960). [5] *Л. М. Глускин,* Там же, № 1 (1963). [6] *М. Гаврилов,* Годишник, Софийск. унив. Матем. фак., 57 (1964). [7] *А. А. Мальцев,* Тр. Ташкентск. политехн. инст., 37 (1966). [8] *K. D. Magill,* Proc. London Math. Soc., v. 15, № 13 (1965). [9] *B. M. Schein,* Fund. Math., t. 68, 1 (1970). [10] *Л. Б. Шнеперман,* Сибирск. матем. журн., № 1 (1970). [11] *Л. Б. Шнеперман,* Матем. сборн., т. 61 (103), № 3 (1963). [12] *M. Wechsler,* Ann. Math., v. 62 (1955). [13] *J. Whittaker,* ibid., v. 78 (1963). [14] *И. Ш. Ярокер,* Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 10 (1971). [15] *Л. Г. Мустафаев,* Автореф. кандидатской диссертации, Саратов, 1967.