Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 3

УДК 517.52 *МАТЕМАТИКА*

М. Х. НАСИБОВ

ЕДИНСТВЕННОСТЬ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 18 VII 1973)

Проблема единственности двойных тригонометрических рядов для некоторого класса изучена в работах К. Гахария ([1]), А. Джваршейшвили ([2, 3]), Н. Тевзадзе ([5]). Далее, в работе ([5]) мы доказали теорему единственности для широкого класса двойных тригонометрических рядов. Затем наша теорема была обобщена в работе ([6]), в которой доказано, что, если двойной тригонометрический ряд всюду на квадрате $[-\pi, \pi]^2$ сходится к конечной интегрируемой по Лебегу функции $f(x, y)$, то этот ряд есть ее ряд Фурье. Для n-кратных рядов подобный результат доказан в ([6]) лишь для случая $\sum\limits_{m_1\geqslant 0} \dots \sum\limits_{m_n\geqslant 0} a_{m_1,\dots,m_n} e^{i(m_1x_1+\dots+m_nx_n)}=0$.

Цель настоящей работы — доказать, что в случае большой размерности этот результат справедлив и для функции $f(x_1, \dots, x_n)$, если функции $f(x_1, \dots, x_n) \ln^+ |f(x_1, \dots, x_n)|$ всюду конечна и суммируема на $R_n^*=[-\pi, \pi]^n$.

1. Пусть в n-мерном параллелепипеде $R_n=[a_1, b_1, \dots, a_n, b_n]$ задана функция $F(x_1, \dots, x_n)$. Возьмем две точки $(u_1, \dots, u_n)$ и $(v_1, \dots, v_n)$ такие, что

$$a_1\leqslant u_1<v_1\leqslant b_1, \dots, a_n\leqslant u_n<v_n\leqslant b_n. \tag{1,1}$$

Введем обозначения

$$\Delta_k(F;\ u_1,\ v_1; \dots; u_k,\ v_k;\ x_{k+1}, \dots, x_n) =$$
$$=\Delta_{k-1}(F;\ u_1,\ v_1; \dots; u_{k-1},\ v_{k-1};\ v_k,\ x_{k+1}, \dots, x_n) -$$
$$-\Delta_{k-1}(F;\ u_1,\ v_1; \dots; u_{k-1},\ v_{k-1};\ u_k,\ x_{k+1}, \dots, x_n),$$

$$\Delta_k^2(F;\ u_1, v_1; \dots; u_k, v_k;\ x_{k+1}, \dots, x_n) =$$
$$=\Delta_{k-1}^2(F;\ u_1, v_1; \dots; u_{k-1}, v_{k-1}, v_k, x_{k+1}, \dots, x_n) +$$
$$+\Delta_{k-1}^2(F;\ u_1, v_1; \dots, u_{k-1}, v_{k-1};\ u_k, x_{k+1}, \dots, x_n) -$$
$$-2\Delta_{k-1}^2(F;\ u_1, v_1; \dots; u_{k-1}, v_{k-1};\ {}^1/_2(u_k+v_k), x_{k+1}, \dots, x_n),$$

где $k=1, 2, \dots, n$ и

$$\Delta_0(F;\ \xi,\ x_2, \dots, x_n) = \Delta_0^2(F;\ \xi,\ x_2, \dots, x_n) = F(\xi,\ x_2, \dots, x_n).$$

Сильной производной функции $F(x_1, \dots, x_n)$ в точке $(x_1, \dots, x_n)$ назовем предел

$$\lim_{h_1, h_2, \dots, h_n\to 0} \frac{\Delta_n(F; x_1, x_1+h_1; x_2, x_2+h_2; \dots; x_n, x_n+h_n)}{h_1\cdot h_2 \dots h_n}$$

и обозначим ее символом $DF(x_1, \dots, x_n)$.

Если существует предел

$$\lim_{h_1, h_2, \dots, h_n\to 0} \frac{\Delta_n^2(F; x_1-h_1, x_1+h_1; x_2-h_2, x_2+h_2; \dots; x_n-h_n, x_n+h_n)}{h_1^2\cdot h_2^2 \dots h_n^2},$$

то его будем называть второй смешанной производной Шварца и обозначать $D^{(2)}F(x_1, \ldots, x_n)$.

Определение. Функцию $F(x_1, \ldots, x_n)$, определенную в области R_n, назовем возрастающей на R_n, если она возрастающая относительно каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$ и, кроме того,

$$\Delta_n(F;\ u_1,\ v_1; \ldots ; u_n,\ v_n) \geqslant 0$$

для любых двух точек $(u_1, \ldots, u_n)$ и $(v_1, \ldots, v_n)$ из R_n, удовлетворяющих условию (1,1).

Теорема 1. *Если E — произвольное множество меры нуль, $E \subset R_n$, то существует непрерывная возрастающая функция $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что во всех точках $(x_1, \ldots, x_n) \in E$ справедливо равенство $D\sigma(x_1, \ldots, x_n) = +\infty$.*

2. Определение. Функцию $F(x_1, \ldots, x_n)$, непрерывную на R_n, будем называть выпуклой на R_n, если в каждой точке $(x_1, \ldots, x_n) \in R_n$ имеет место неравенство

$$\underline{D}^{(2)}F(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0,$$

где $\underline{D}^{(2)}F(x_1, \ldots, x_n$ — нижняя вторая производная Шварца функции $F(x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема 2. *Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является возрастающей на R_n, то ее неопределенный интеграл*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{a_1}^{x_1} \ldots \int\limits_{a_n}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n$$

будет выпуклой функцией.

Теорема 3. *Пусть функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна на R_n. Если почти всюду на R_n справедливо неравенство $\underline{D}^{(2)}F(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$ и всюду на R_n выполняется $\underline{D}^{(2)}F(x_1, \ldots, x_n) > -\infty$, то функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ будет выпуклой на R_n.*

Теорема 4. *Если функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна в области R_n и всюду в R_n*

$$DF(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

то $F(x_1, \ldots, x_n)$ имеет вид

$$F(x_1, \ldots, x_n) = A_1 x_1 + B_1 + \ldots + A_n x_n + B_n,$$

где

$$A_1 = A_1(x_2, \ldots, x_n), \quad B_1 = B_1(x_2, \ldots, x_n), \quad A_i = A_i(x_1, \ldots, x_{i-1},\ x_{i+1}, \ldots, x_n);$$
$$B_i = B_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),\ i = 2, 3, \ldots, n-1, \quad A_n = A_n(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$
$$B_n = B_n(x_1, \ldots,\ x_{n-1}).$$

3. Теорема 5. *Пусть в области R_n задана непрерывная функция $F(x_1, \ldots, x_n)$, имеющая всюду в R_n вторую смешанную производную Шварца*

$$D^{(2)}F(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Если функция $f(x_1, \ldots, x_n) \ln^+ |f(x_1, \ldots, x_n)|$ всюду конечна и суммируема на R_n, то справедливо равенство

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{a_1}^{x_1} \ldots \int\limits_{a_n}^{x_n} dt_1 \ldots dt_n \int\limits_{a_1}^{t_1} \ldots \int\limits_{a_n}^{t_n} f(\tau_1, \ldots, \tau_n)\, d\tau_1 \ldots d\tau_n +$$
$$+ A_1 x_1 + B_1 + \ldots + A_n x_n + B_n.$$

4. Рассмотрим n-кратный тригонометрический ряд

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{m_n=0}^{\infty} \lambda_{m_1, \ldots, m_n} \cdot A_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots x_n), \tag{4,1}$$

где $\lambda_{m_1,\ldots,m_n}=1/2^\nu$, $0\leqslant\nu\leqslant n$, ν обозначено количество нулей среди индексов $m_1,\ldots,m_n$ каждого члена ряда (4,1);

$$A_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots x_n)=\sum_{i=1}^{2^n} a_{m_1,\ldots,m_n}^{(i)}\cdot A_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n),$$

$a_{m_1,\ldots,m_n}^{(i)}$ — коэффициенты и через $A_{n_1,\ldots,m_n}^{(i)}(x_1,\ldots,x_n)$ обозначены члены, находящиеся на i-м месте в разложении произведения

$$(\cos m_1x_1+\sin m_1x_1)\cdot(\cos m_2x_2+\sin m_2x_2)\ldots(\cos m_nx_n+\sin m_nx_n).$$

Пусть

$$|a_{m_1,\ldots,m_n}^{(i)}|\leqslant M,\quad i=1,2,\ldots,2^n, \tag{4,2}$$

где M — константа, не зависящая от $m_1,\ldots,m_n$.

Формально проинтегрировав почленно по каждому переменному ряд (4,1) дважды, определим функцию $F(x_1,\ldots,x_n)$ так:

$$F(x_1,\ldots x_n)=\sum_{m_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{m_n=0}^{\infty}\Lambda_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)\cdot A_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n).$$

Отсюда получается

$$\frac{\Delta_n^2(F;x_1-h_1,x_1+h_1;x_2-h_2,x_2+h_2;\ldots;x_n-h_n,x_n+h_n)}{h_1^2\cdot h_2^2\ldots h_n^2}=$$

$$=\sum_{m_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{m_n=0}^{\infty}\lambda_{m_1,\ldots,m_n}\cdot A_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)\cdot\left(\frac{\sin m_1h_1}{m_1h_1}\right)^2\ldots\left(\frac{\sin m_nh_n}{m_nh_n}\right)^2.$$

Определение. Ряд (4,1) назовем суммируемым методом Римана к функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ в точке $(x_1,\ldots,x_n)$, если

$$D^{(2)}F(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_n).$$

Теорема 6. *Если кратный тригонометрический ряд* (4,1) *сходится всюду в* R_n^* *к конечной функции* $f(x_1,\ldots,x_n)$, *то данный ряд суммируем методом Римана к функции* $f(x_1,\ldots,x_n)\ln^+|f(x_1,\ldots,x_n)|$.

5. Теорема 7. *Пусть кратный тригонометрический ряд* (4,1) *сходится всюду на* R_n^* *к функции* $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Если функция $f(x_1,\ldots,x_n)\ln^+|f(x_1,\ldots x_n)|$ *всюду конечна и суммируема на* R_n^*, *то ряд* (4,1) *есть ряд Фурье функции* $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Следствие. *Если ряд* (4,1) *сходится всюду на* R_n^* *и его сумма везде равна нулю, то и все его коэффициенты равны нулю.*

Азербайджанский политехнический институт
им. Ч. Ильдрыма
Баку

Поступило
5 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *К. К. Гахария*, Матем. сборн., т. 28 (70), 20 (1951). [2] *А. Г. Джваршейшвили*, Сообщ. АН ГрузССР, т. 13 (1952). [3] *А. Г. Джваршейшвили*, Тр. матем. инст. АН ГрузССР, т. 20 (1954). [4] *Н. Р. Тевзадзе*, Тбилиси, Тр. унив., т. 84 (1965). [5] *М. Х. Насибов*, Изв. АН АзербССР, сер. физ.-техн., т. 2 (1964). [6] *J. M. Ash, G. V. Welland*, Trans. Am. Math. Soc., v. 163 (1972)