Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 4

УДК 517.949.8 *МАТЕМАТИКА*

М. А. КРОНРОД

ДВУМЕРНАЯ ПРОГОНКА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 VII 1973)

В работе изложен алгоритм решения сеточных задач, возникающих при решении краевых задач некоторых видов эллиптических и параболических уравнений.

Пусть для каждой внутренней клетки прямоугольной матрицы M задано уравнение вида

$$\sum_{s=1}^{4} \Theta_s(u-u_s)+\lambda u=b, \tag{1}$$

где u — значение функции в данной, u_s — в смежных клетках. Коэффициенты Θ_s, λ и b свои для каждой клетки, причем все Θ_s и λ неотрицательны.

Задача состоит в нахождении значений функции u во внутренних клетках матрицы M при заданных значениях функции в граничных клетках. Мы будем называть b источниками, а Θ_s — коэффициентами проводимости из данной клетки в смежные. Отметим, что для двух смежных клеток не требуется равенства коэффициентов проводимости между ними.

Клетка B называется **достижимой** из клетки A, если существует последовательность смежных клеток, начинающаяся с A и кончающаяся B, такая, что коэффициент проводимости из предыдущей клетки в последующую (соответствующее Θ_s в уравнении (1) для предыдущей клетки) отличен от нуля для клеток этой последовательности.

Клетка, для которой $\lambda\neq 0$, называется **квазиграничной**.

Лемма 1. *Пусть дана система уравнений* (1) *и заданы значения функции в граничных клетках. Пусть из каждой неквазиграничной клетки достижима хотя бы одна граничная или квазиграничная.*

Тогда решение задачи существует и единственно.

Теорема 1. *Пусть в условиях леммы* 1 *размеры матрицы* $n\times n$.

Решение задачи можно получить за Cn^3 *действий* *.

Теорема 2 (обобщение предыдущей). *Пусть в условиях леммы* 1 *размеры матрицы* $n\times k$.

Решение задачи можно получить за Cnk^2 *действий,* $n\geqslant k$.

Теорема 3. *Пусть в условиях теоремы* 1 (*теоремы* 2) *фиксированы коэффициенты* Θ_s *и* λ, *но не* b. *За* Cn^3 (*за* Cnk^2) *действий можно найти систему матриц, позволяющую после задания источников* b *и значений функции на границе получить решение задачи за* $Cn^2 \lg n$ (*за* $Cnk \lg k$) *действий.*

Теорема 4 (дается без доказательства). *Пусть дана система уравнений* (1), *пусть нет квазиграничных клеток и пусть все коэффициенты проводимости в граничные клетки равны нулю. Пусть имеется клетка* Z, *которая достижима из каждой. Добавив в левую часть уравнения* (1) *для клетки* Z *член* u, *мы получим новую задачу, удовлетворяющую условиям леммы* 1. *Если решение новой задачи дает значение* 0 *в клетке* Z, *оно является также решением исходной задачи* (*причем решения исходной задачи образуют однопараметрическое семейство, зависящее от аддитивной константы*). *В противном случае исходная задача неразрешима.*

---

* Здесь и далее константы C не зависят от размеров матриц. Оценки даны без учета результатов Штрассена.

О б о з н а ч е н и я. Клетки матрицы M будем обозначать заглавными латинскими буквами. Пара букв AB, где A и B — клетки, лежащие в одном столбце или в одной строке, обозначает вектор из клеток, лежащих между A и B, но не включающий A и B. Четверка букв $ABCD$, соответствующая вершинам прямоугольника, обозначает к о н т у р, состоящий из векторов AB, BC, DC и AD. Внутренними клетками контура называются внутренние клетки прямоугольника.

Л е м м а 2. *Пусть дана система уравнений* (1). *Пусть из каждой неквазиграничной клетки достижима хотя бы одна граничная или квазиграничная.*

Тогда существует и единственна система выражений функции во внутренних клетках через значения в граничных, дающая решение системы (1) *после задания функции в граничных клетках, причем такое выражение имеет вид*

$$u=\alpha\cdot AB+\beta\cdot BC+\gamma\cdot DC+\delta\cdot AD+\varepsilon, \tag{2}$$

где u — значение функции в данной клетке, α, β, γ, δ — векторы, ε — число (свои для каждой клетки), A, B, C и D — угловые клетки матрицы M (соответственно AB, BC, DC и AD — векторы, составляющие границу без угловых клеток).

В леммах 3—5 все контуры предполагаются принадлежащими матрице M, для которой выполнены условия леммы 2. В этом случае для каждого такого контура также выполняются условия леммы 2.

Если $ABCD$ — контур, EF — некоторый вектор из внутренних клеток этого контура, то выражение значений функции в клетках вектора через значения в клетках контура записывается в виде

$$EF=\alpha\cdot AB+\beta\cdot BC+\gamma\cdot DC+\delta\cdot AD+w,$$

где α, β, γ, δ — матрицы, w — вектор. Если эти матрицы и вектор w вычислены, мы будем говорить, что д а н о в ы р а ж е н и е вектора EF через контур $ABCD$.

Л е м м а 3. *Пусть $AEOK$ — контур* (см. рис. 1), *B, C и D — произвольные клетки на векторе AE и пусть линейные размеры контура не превышают l. Пусть дано выражение вектора BL через контур $ACMK$, CM — через $BDNL$ и DN — через $CEOM$.*

Тогда выражение вектора CM через контур $AEOK$ можно получить за Cl^3 действий.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим выражения векторов BL и DN в выражение вектора CM. Получим выражение вида

$$\alpha\cdot CM=\beta\cdot AE+\gamma\cdot EO+\delta\cdot KO+\varepsilon\cdot AK+w, \tag{3}$$

где α, β, γ, δ и ε — матрицы, w — вектор. Невырожденность матрицы α может быть доказана. Обратив ее и умножив α^{-1} на (3), получим искомое выражение.

Л е м м а 4. *Пусть $AEYU$ — контур* (см. рис. 2), *B, C, D и F, K, P — произвольные клетки на векторах AE и AU и пусть линейные размеры контура не превышают l. Пусть дано выражение векторов FH и BL через контур $ACMK$, HJ и DN — через $CEOM$, PR и LV — через $KMWU$, RT и NX — через $MOYW$, а также выражения векторов CM, KM, MO и MW через контуры $BDNL$, $FHRP$, $HJTR$ и $LNXV$ соответственно.*

Тогда выражения векторов KO и CW через контур $AEYU$ можно получить за Cl^3 действий.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя лемму 3, получим выражения векторов CM, KM, MO и MW через контуры $AEOK$, $ACWU$, $CEYW$ и $KOYU$ соответственно. Подставив полученные выражения векторов CM и MW в полученные выражения векторов KM и MO и подставив в уравнение (1) для клетки M выражение ее верхнего и нижнего соседей через контуры $AEOK$ и $KOYU$ (взятые из выражений CM и MW через эти контуры), получим выражение вида

$$\alpha\cdot KO=\beta\cdot AE+\gamma\cdot EY+\delta\cdot UY+\varepsilon\cdot AU+w. \tag{4}$$

Невырожденность матрицы α может быть доказана. Обратив ее и умножив α^{-1} на (4), найдем выражение KO через $AEYU$.

Выражение CW может быть получено аналогично. Его можно получить и быстрее, используя выражения CM и MW через $AEOK$ и $KOYU$ и выражение вектора KO через $AEYU$.

Лемма 5 (основная). *Пусть $AEYU$ — контур (см. рис. 3), C и K — произвольные клетки на векторах AE и AU и пусть линейные размеры контура не превосходят l. Пусть еще отношение длин любых двух из векторов AC, CE, AK и KU не превосходит* 2.

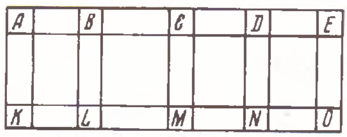

Рис. 1

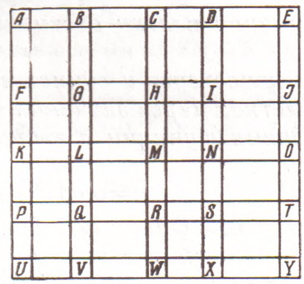

Рис. 2

Тогда выражение векторов KO и CW через контур $AEYU$ можно получить за Cl^3 действий.

Доказательство. Возьмем клетки B, D, F и P в серединах векторов AC, CE, AK и KU соответственно (с точностью до одной клетки в зависимости от четности длин этих векторов). Нарисовав нужные векторы, получим картину, изображенную на рис. 2.

По лемме 4 мы можем свести задачу нахождения выражения «креста» из пары векторов (KO, CW) через контур $AEYU$ к восьми задачам нахождения выражений более мелких «крестов» (FH, BL), (GI, CM), (HJ, DN), (KM, GQ), (MO, IS) и т. д. через соответствующие малые контуры $ACMK$, $BDNL$ и т. д. Эти задачи сводятся в свою очередь к еще более мелким. На самом глубоком уровне мы получаем задачи с размерами контуров не более 6×4. Такая задача решается за C действий.

Особенно прост случай, когда матрица $AEYU$ квадратная порядка 2^p+1, а клетки C и K — середины сторон. Тогда на самом глубоком уровне имеем размеры контуров 3×3. Требуемое выражение единственной внутренней клетки такого контура дается уравнением (1) для этой клетки.

Оценка количества действий вытекает из того факта, что мы имеем на первом уровне один «крест», на втором — 9, на уровне m — $(2^m-1)^2$ «крестов». Таким образом, количество «крестов» на уровне m не превосходит 4^m, что приведет нас при подсчете количества действий к геометрической прогрессии со знаменателем 2 и, как следствие, к нужной оценке.

Доказательство теоремы 1. Обозначим угловые клетки матрицы M буквами A, E, Y и U. Взяв C и K в серединах векторов AE и AU, придем к картине рис. 3. По лемме 5 получим выражение векторов KO и CW через границу. Подставив в них значения на границе, получим значения функции в клетках этих векторов.

Мы свели задачу к четырем более мелким (для контуров $ACMK$, $CEOM$, $MOYW$ и $KMWU$). Каждую сведем к четырем еще более мелким и так до получения решения во всех клетках. При этом можно прямо использовать промежуточные выражения «крестов» через контуры, полученные при нахождении выражения «креста» (KO, CW) через контур $AEYU$.

Доказательство теоремы 2. Если $n \leqslant 2k$, доказательство такое же, как и для теоремы 1.

Пусть $n > 2k$. Обозначим угловые клетки матрицы M буквами A, B, C и D. Возьмем на векторе AB клетки E_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, так, чтобы длины векторов AE_1 и E_iE_{i+1}, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, были равны $[k/2]$, а длина вектора E_mB заключалась между $[k/2]$ и k (см. рис. 4).

Используя лемму 5, мы можем выразить каждый из векторов E_iF_i через контур $E_{i-1}E_{i+1}F_{i+1}F_{i-1}$ (векторы E_1F_1 и E_mF_m через контуры AE_2F_2D и $E_{m-1}BCF_{m-1}$). Подставив в эти выражения значения функции на границе, мы получим систему выражений

$$E_iF_i=\alpha_i\cdot E_{i-1}F_{i-1}+\beta_i\cdot E_{i+1}F_{i+1}+w_i, \quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

с нулевыми матрицами α_1 и β_m.

Полученная система устойчиво решается методом матричной прогонки за Cnk^2 действий. После этого значения функции во внутренних клетках контуров $E_iE_{i+1}F_{i+1}F_i$ также могут быть получены за Cnk^2 действий (или даже быстрее, за $Cnk \lg k$ действий, если мы запомнили промежуточные выражения всех «крестов» через соответствующие малые контуры, получаемые при нахождении выражений векторов E_iF_i через контуры $E_{i-1}E_{i+1}F_{i+1}F_{i-1}$).

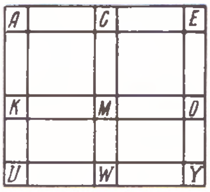

Рис. 3

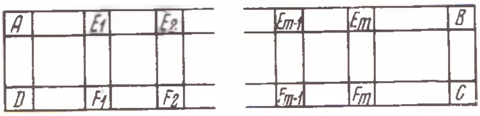

Рис. 4

Доказательство теоремы 3. Операции, которыми мы пользовались в описанных алгоритмах – это умножение матрицы на матрицу, обращение матрицы и умножение матрицы на вектор.

Заметим, что все промежуточные матрицы не зависят от источников b и граничных значений, так как в уравнениях (1) они входят в правую часть и, следовательно, входят лишь в столбец свободных членов во всех промежуточных выражениях.

При решении задачи с новыми источниками и граничными значениями меняются только столбцы свободных членов, участвующие лишь в операциях типа умножение матрицы на вектор. Поэтому, если все промежуточные матрицы, получающиеся на всех уровнях при решении задач теорем 1 и 2, уже выписаны, то при решении задачи остаются только операции типа умножение матрицы на вектор.

В алгоритме, соответствующем лемме 5, число действий в таких операциях составляет Cl^2 на каждом уровне, число уровней – порядка $\lg l$. Из этого следуют оценки, данные в формулировке теоремы.

Замечание 1. В выражении (2) компоненты векторов α, β, γ и δ неотрицательны и в сумме не превосходят единицы, что следует из неотрицательности коэффициентов Θ_s и λ в (1). Поэтому изменение значений функции на контуре в выражении (2) приводит к изменению значения u, не превышающему максимального изменения на контуре. Это существенно при использовании описанных алгоритмов для вычислительных целей.

Замечание 2. Задача для области M непрямоугольной формы может быть сведена к задаче для прямоугольника. Впишем такую область в прямоугольник и зададим в клетках прямоугольника, не принадлежащих M, уравнение (1) так: $u=0$. Такая задача решается по теореме 2 (если система уравнений для области M удовлетворяла требованиям, аналогичным требованиям леммы 1).

Замечание 3. Если некоторый малый контур пересекается с границей (т. е. известны значения функции на части контура), мы можем вместо выражения (2) использовать выражение функции через часть контура, не пересекающуюся с границей, подставив значения функции на общей части контура и границы в выражение (2). Это уменьшает время вычислений примерно в 2 раза.

Институт проблем передачи информации
Академии наук СССР
Москва

Поступило
1 VII 1973