Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 4

УДК 517.54 *МАТЕМАТИКА*

В. В. КРИВОВ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ КОНФОРМНОЙ ЕМКОСТИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 16 VII 1973)

В теории квазиконформных отображений в пространстве основными инструментами исследований являются понятия конформной емкости ([1]) и модуля семейства кривых или поверхностей ([2]). С успехом применяются оба эти понятия. Следует заметить, однако, что модуль семейства кривых или поверхностей определяется с помощью двух разнородных объектов: самого семейства и совокупности допустимых метрик. Первый из этих объектов ковариантен, второй контравариантен. Конформная емкость определяется с помощью лишь одного контравариантного объекта: семейства допустимых функций. Это облегчает ее применение в случае негомеоморфных отображений.

В настоящей заметке вводится естественное обобщение понятия конформной емкости. Приведенные примеры показывают, что оно, являясь квазиинвариантом, приспособлено к промежуточным дилатациям и обладает достаточной гибкостью.

1. Пусть R^n и R^m — эвклидовы пространства размерности n и m соответственно, L: $R^n \to R^m$ — линейное отображение. Фиксируя подпространство $R^l \subset R^n$, обозначим через $\tilde{L}$ сужение L на R^l и $J_l(\tilde{L})$ — якобиан $\tilde{L}$. Положим

$$|L|_l = \sup_{R^l \subset R^n} |J_l(\tilde{L})|, \quad \mu_l(L) = \inf_{R^l \subset R^n} |J_l(\tilde{L})|,$$

где верхняя и нижняя грани берутся по всем $R^l \subset R^n$.

Пусть, далее, M и N — римановы многообразия размерности n и l соответственно, $n > l$, F — некоторая совокупность отображений M в N (термин «отображение» означает непрерывное, обладающее локально суммируемыми в n-й степени обобщенными производными в смысле Соболева и почти всюду дифференцируемое отображение). Фиксируя отображение $u \in F$, обозначим u' его производную, понимаемую как соответствующее линейное отображение касательных пространств. Это линейное отображение определено для почти всех точек $x \in M$.

Определение. Обобщенной конформной емкостью многообразия M относительно F называется величина

$$\gamma(M, N, F) = \left(\inf_{u \in F} \int_M |u'|_l^{n/l} dx \right)^{l/n}, \tag{1}$$

где dx — элемент объема, определяемого метрикой многообразия M, а нижняя грань берется по всем $u \in F$.

Если нижняя грань в (1) достигается на некотором отображении $u \in F$, то такое отображение называется экстремальным для $\gamma(M, N, F)$.

Отметим некоторые свойства введенного понятия. Пусть даны два отображения f: $M \to f(M)$ и g: $N \to g(N)$. Если F — класс отображений $f(M)$ в N, то через $F \circ f$ мы будем обозначать класс всех композиций вида $u \circ f$, где $u \in F$. Далее, если F — класс отображений M в N, то через $g \circ F$ мы обозначим класс всех композиций вида $g \circ u$, где $u \in F$. Справедливы следующие утверждения.

1) Если $F_1 \subset F$, то $\gamma(M, N, F_1) \geqslant \gamma(M, N, F)$.

2) Если $f: M \to f(M)$ — гомеоморфное конформное отображение, то $\gamma(f(M), N, F) = \gamma(M, N, F \circ f)$. Если, вдобавок, u — экстремальное отображение для $\gamma(f(M), N, F)$, то $u \circ f$ — экстремальное отображение для $\gamma(M, N, F \circ f)$.

3) Если $g: N \to g(N)$ отображение с постоянным якобианом $J(g)$, то $\gamma(M, g(N), g \circ F) = J(g) \cdot \gamma(M, N, F)$. Если, вдобавок, u — экстремальное отображение для $\gamma(M, N, F)$, то $g \circ u$ — экстремальное отображение для $\gamma(M, g(N), g \circ F)$.

Здесь свойство 1) тривиально, свойство 3) почти очевидно, а свойство 2) вытекает из приводимой теоремы 1.

Приведем вначале некоторые примеры.

1) $M = R^n$; $N = R^1$; F — совокупность отображений $u: R^n \to R^1$ таких, что $u(B_0) = 0$; $u(B_1) = 1$, где B_0, $B_1 \subset R^n$ — два фиксированных непересекающихся континуума. Тогда $\gamma(R^n, R^1, F) = (\Gamma(G))^{1/n}$, где $\Gamma(G)$ — конформная емкость по Лёвнеру кольца $G = R^n \setminus (B_0 \cup B_1)$.

2) M — сферическое кольцо в R^n, $M = \{x: x \in R^n,\ a \leqslant \|x\| \leqslant b\}$, N — единичная сфера, $N = S^{n-1} = \{x: x \in R^n, \|x\| = 1\}$, F — совокупность отображений, гомотопных проектированию $p: x \to x/\|x\|$, $x \in M$. Обозначим ω_{n-1} $(n-1)$-мерную меру единичной сферы S^{n-1}. Для любого $u \in F$, применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\left(\int_M |u'|_{n-1}^{n/(n-1)} dx\right)^{(n-1)/n} \geqslant \left(\int_M |u'|_{n-1} \frac{1}{\|x\|} dx\right) \left(\int_M \frac{dx}{\|x\|^n}\right)^{-1/n}. \tag{2}$$

Далее находим

$$\int_M \frac{dx}{\|x\|^n} = \int_a^b dr \int_{\|x\|=r} \frac{1}{\|x\|^n} d\sigma = \int_a^b \frac{1}{r^n} \omega_{n-1} r^{n-1} dr = \omega_{n-1} \ln \frac{b}{a}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) вытекает неравенство $\left(\int_M |u'|_{n-1}^{n/(n-1)} dx\right)^{(n-1)/n} \geqslant \left(\omega_{n-1} \ln \frac{b}{a}\right)^{(n-1)/n}$, в котором равенство достигается при $u = p$. Следовательно, с точностью до постоянного множителя, $\gamma(M, S^{n-1}, F)$ равно модулю семейства разделяющих поверхностей кольца M, возведенному в степень $(n-1)/n$.

3) M — обобщенный тор $S^l \times S^m$. Построим его как гиперповерхность в пространстве R^{l+m+1}. Для этого представим R^{l+m+1} в виде прямой суммы двух ортогональных подпространств $R^{l+m+1} = R^{l+1} \oplus R^m$. Обозначим $S^l = \{x: x \in R^{l+1};\ \|x\| = 1\}$. Пусть для данного элемента $x \in S^l$ R_x^1 обозначает порождаемое этим элементом одномерное подпространство, S_x^m — совокупность всех точек в R^{l+m+1} вида $ax + y$, где $x \in S^l$. $y \in R^m \oplus R_x^1$; $\|y\| = 1$, $a > 1$ — фиксированное число. Определим теперь $M(a)$ как объединение S_x^m по всем $x \in S^l$. Легко видеть, что $M(a)$ есть многообразие типа $S^l \times S^m$. Возьмем в качестве F совокупность всех отображений $M(a)$ в S^l, не гомотопных отображению в точку. Вычислим величину $\gamma(M(a), S^l, F)$. Применяя теорему Фубини и неравенство Гёльдера, найдем

$$\gamma(M(a); S^l; F) = C \cdot (a^2 - 1)^{-ml/2(m+l)}, \tag{4}$$

где C зависит только от l и m. В частном случае $l = m = 1$, когда $M(a)$ — обычный тор, величина γ с точностью до постоянного множителя совпадает с модулем семейства кривых, гомотопных параллелям тора.

2. Квазиинвариантность. Вначале введем соответствующие характеристики квазиконформности. С этой целью для невырожденного ли-

нейного отображения L положим

$$K_l(L)=\frac{|J(L)|^{l/n}}{\mu_l(L)}=\left(\frac{|J(L)|}{\mu_l^{n/l}}\right)^{l/n},\qquad l=1,2,\ldots,n-1,$$

а если отображение вырождено, то будем считать $K_l(L)=1$, если образом является единственная точка и $K_l(L)=+\infty$ в других случаях.

Пусть f: $M\to f(M)$ — отображение одного риманова многообразия в другое.

Определение 2. Величина $K_l(f)=\operatorname{vrai}\max\limits_{x\in M} K_l(f')$ называется l-й дилатацией отображения f.

В частности, $K_1(f)$ и $K_{n-1}(f)$ соответствуют внутренней и внешней дилатациям (см., например, ([3])).

Лемма 1. *Если $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n$ — растяжения в данной точке $x\in M$ по взаимно перпендикулярным направлениям для линейного отображения f', то*

$$K_l(f)=\operatorname{vrai}\max_{x\in M}\frac{(\lambda_1\ldots\lambda_n)^{l/n}}{\lambda_{n-l+1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n}.$$

Доказательство мы опускаем.

Лемма 2. *Если существует обратное отображение f^{-1}, то*

$$K_l(f)=K_{n-l}(f^{-1}).\tag{5}$$

Это утверждение вытекает из леммы 1.

Теперь рассмотрим два линейных отображения: L_1: $R^n\to R^n$ и L_2: $R^n\to R^m$, причем будем считать, что L_1 невырождено, так что $\det L_1\neq0$. Тогда

$$|J_l(\tilde L_2\circ\tilde L_1)|=|J_l(\tilde L_1)|\ |J_l(\tilde L_2)|\leqslant|L_1|_l\ |L_2|_l,$$

откуда

$$\mu_l(L_1)\cdot|J_l(L_2)|\leqslant|J_l(\tilde L_2\circ\tilde L_1)|\leqslant|L_2\circ L_1|_l$$

и, следовательно,

$$|L_2|_l\leqslant\frac{|L_2\circ L_1|_l}{\mu_l(L_1)}.\tag{6}$$

Теорема 1. *Справедливо следующее неравенство:*

$$\gamma(f(M),N,F)\leqslant K_l(f)\cdot\gamma(M,N,F\circ f).\tag{7}$$

Доказательство. Для $x\in M$; $y=f(x)$ обозначим через $\nu(y)$ число прообразов точки y при отображении f. Возьмем любое $u\in F$. Тогда $(u\circ f)'=u'\circ f'$ для почти всех x и, воспользовавшись неравенствами (6) при $L_2=u'$; $L_1=f'$, получим

$$\int\limits_{f(M)}|u'|_l^{n/l}\,dy\leqslant\int\limits_{f(M)}|u'|_l^{n/l}\nu(y)\,dy\leqslant\int\limits_M\frac{|u'\circ f'|^{n/l}}{(\mu(f'))^{n/l}}|J(f)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant K_l^{n/l}(f)\int\limits_M|u'\circ f'|_l^{n/l}\,dx,$$

откуда

$$\gamma(f(M),N,F)\leqslant K_l(f)\left(\int\limits_M|(u\circ f)'|_l^{n/l}\,dx\right)^{l/n},\tag{8}$$

что и доказывает теорему.

Следствие 1. *Если отображение f: $M\to f(M)$ гомеоморфно, то*

$$\frac{1}{K_{n-l}(f)}\gamma(M,N,F\circ f)\leqslant\gamma(f(M);N;F)\leqslant K_l(f)\cdot\gamma(M,N,F\circ f).\tag{9}$$

Здесь для доказательства левого неравенства надо применить теорему 1 для отображения f^{-1} и учесть (5).

Следствие 2. *Обобщенная конформная емкость является конформным инвариантом.*

3. Укажем некоторые применения введенного здесь квазиинварианта, связанные с оценками снизу дилатации и экстремальными отображениями.

Теорема 2. *Для любого квазиконформного гомеоморфного отображения обобщенного тора $M(a)$ типа $S^m\times S^l$ на обобщенный тор $M(b)$, где $a<b$, справедливо неравенство*

$$K_l(f)\geqslant\left(\frac{b^2-1}{a^2-1}\right)^{ml/2(m+l)}.$$

Это сразу вытекает из (4) и (8). Отметим, что этим же способом можно получить теорему 1 из ([4]), а также некоторые ее обобщения.

Пусть $D_1\subset R^l$ и $D_2\subset R^m$ — две области, p_1: $R^l\to R^l$ и p_2: $R^m\to R^m$ — невырожденные аффинные отображения с якобианами J_1 и J_2, причем каждое растяжение отображения p_1 меньше любого растяжения отображения p_2. Прямое произведение $D_1\times D_2$ можно представить вложенным в пространство R^{l+m}. Обозначая через $\bar{A}$ замыкание и через ∂A границу множества A, рассмотрим класс $\mathfrak{M}$ гомеоморфных квазиконформных отображений $\overline{D_1\times D_2}$ на $\overline{p_1(D_1)\times p_2(D_2)}$ таких, что $\overline{\partial D_1\times D_2}$ отображается на $\overline{\partial p_1(D_1)\times p_2(D_2)}$. Определим отображение p: $\overline{D_1\times D_2}\to\overline{p_1(D_1)\times p_2(D_2)}$ по формуле $p(x,y)=(p_1(x);\ p_2(y))$, где $x\in\bar{D}_1$, $y\in\bar{D}_2$. Пусть $\gamma(\overline{p_1(D_1)\times p_2(D_2)},\overline{p_1(D_1)},F)=\gamma_1$, $\gamma(F\circ f,\overline{D_1\times D_2},\overline{p_1(D_1)})=\gamma_2$, где F — класс отображений u: $\overline{p_1(D_1)\times p_2(D_2)}\to\overline{p_1(D_1)}$ таких, что $\partial p_1(D_1)\times p_2(D_2)$ отображается на $\partial p_1(D_1)$.

Теорема 3. *Если $\gamma_2\neq0,+\infty$, то для любого отображения $f\in\mathfrak{M}$: $K_l(f)\geqslant K_l(p)=(J_2^l/J_1^m)^{1/(l+m)}$.*

Для доказательства каждому $u\in F$ поставим в соответствие $u\circ p\in F\circ f$. Это соответствие взаимно однозначно и, так как

$$\int\limits_{p(D_1\times D_2)}|u'|_l^{n/l}\,dy=\int\limits_{D_1\times D_2}\frac{|u'\cdot p'|_l^{n/l}}{|\mu_l(p')|^{n/l}}|J(p)|\,dx=K_l^{n/l}(p)\int\limits_{D_1\times D_2}|u'\cdot p'|_l^{n/l}\,dx,$$

то $\gamma_1=K_l(p)\gamma_2$. Вместе с (8) это доказывает теорему.

Частный случай этой теоремы, когда $l=m=1$, содержится в статье ([5]). Другой частный случай, когда $l=1$, $m=2$, содержится в работе автора ([6]).

В заключение автор выражает благодарность проф. Б. В. Шабату и проф. В. А. Зоричу за обсуждение работы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *C. Loewner*, J. Math. Mech., v. 8 (1959). [2] *Б. В. Шабат*, ДАН, т. 130, № 6 (1960). [3] *F. W. Gehring, J. Väisälä*, Acta Math., v. 114, 1 (1965). [4] *Ф. В. Геринг*, Сборн. Некоторые проблемы математики и механики, «Наука», 1970. [5] *H. Grötsch*, Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Lpz., v. 84, 114 (1932). [6] *В. В. Кривов*, ДАН, т. 145, № 3 (1962).