Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 3

УДК 517.948.33+532.2 *МАТЕМАТИКА*

С. Н. АНТОНЦЕВ

ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 29 X 1973)

Доказана разрешимость задачи о соударении двух осесимметрических газовых струй, приближенное исследование и численные расчеты которой изложены в [1, 2]. Рассмотрена также осесимметрическая задача об истечении газа из сопла заданной формы с внутренним телом и ее предельные случаи: истечение из сопла, удар струи о стенку. Показано, что при звуковых скоростях на свободных границах, выравнивание струй, движущихся вдоль оси симметрии, происходит (аналогично плоскому случаю [3]) на конечном расстоянии.

1°. Постановка задач. Известно [1], что стационарное потенциальное течение баротропного газа описывается уравнением

$$\operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} \varphi) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \tag{1}$$

$$\rho = \rho(q), \quad q = |\operatorname{grad} \varphi|, \quad a_{ij} = \left(\delta_{ij}\rho + \frac{1}{q}\rho' \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right).$$

Задача I (осесимметрическое соударение двух струй). Требуется определить область Ω_x с границей S_x и функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv \varphi(r, x_3)$, $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям

$$(\nabla\varphi \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad |\nabla\varphi| = q_0, \quad \mathbf{x} \in S_x, \tag{2}$$

$$\varphi(0, 0) = \nabla\varphi(0, 0) = 0, \quad \varphi(0, \pm\infty) = -\infty, \quad \varphi(\infty, x_3) = \infty, \quad x_3 \in S_x, \tag{3}$$

$$\nabla\varphi(r_0^\pm, \pm\infty) = \{0, 0, \pm q_0\} \quad (r_0^\pm, \pm\infty) \in S_x. \tag{4}$$

Задача II (истечение струи из сопла заданной формы). В области Ω_x, ограниченной заданными поверхностями $S_x^1 = \{r = f_1(x_3),\ -\infty < x_3 < x_3^0\}$, $S_x^2 = \{x_3 = f_2(r),\ f_2(0) = 0,\ r \leqslant r_0\}$ и свободной границей S_x^0, определить решение уравнения (1) $\varphi(r, x_3)$, $\varphi(0, 0) = \nabla\varphi(0, 0) = 0$, удовлетворяющее условиям

$$(\nabla\varphi \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_x = S_x^0 + S_x^1 + S_x^2, \tag{5}$$

$$|\nabla\varphi| = q_0, \quad \mathbf{x} \in S_x^0; \quad \varphi(x_1, x_2, \pm\infty) = \infty, \quad \mathbf{x} \in S_x; \tag{6}$$

здесь $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к S_x, $\nabla\varphi = \{\partial\varphi/\partial x_1, \partial\varphi/\partial x_2, \partial\varphi/\partial x_3\}$, $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $r_0^\pm$, q_0 — заданные положительные постоянные.

Решения сформулированных выше задач будут получены как предел последовательности решений вспомогательных задач в конечных областях. Сформулируем вспомогательную задачу I.1 и проведем доказательство в случае 1.

Задача I.1. В области Ω_x, ограниченной плоскостями $S_x^\pm = \{x_3 = x_3^\pm \gtrless 0\}$ и неизвестной границей $S_x^0 + S_x^1$, требуется определить решение $\varphi(r,$

x_3), $\varphi(0,0)=\nabla\varphi(0,0)=0$, уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$(\nabla\varphi\cdot\mathbf{n})=0,\quad |\nabla\varphi|=q_0,\quad \mathbf{x}\in S_x^0, \tag{7}$$

$$\varphi=\varphi_0^\pm,\quad \mathbf{x}\in S_x^\pm;\quad \varphi=\varphi_1,\quad |\nabla\varphi|=q_0,\quad \mathbf{x}\in S_x^1, \tag{8}$$

$$r(x_3^\pm)=r_0^\pm,\quad \mathbf{x}\in S_x^0. \tag{9}$$

Числовые же параметры $x_3^\pm \lesseqgtr 0$ (либо $\varphi_0^\pm<0$) при заданных $\varphi_1>0$, $r_0^\pm>0$ также являются искомыми.

2°. Разрешимость задачи I.1. Известно, что в случае осевой симметрии можно ввести функцию тока $\psi(r,x_3)$ и получить уравнения

$$\frac{\partial x_3}{\partial\varphi}=r\rho\frac{\partial r}{\partial\psi},\quad \frac{\partial r}{\partial\varphi}=-r\rho\frac{\partial x_3}{\partial\psi}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}=r\rho\frac{\partial\ln q}{\partial\psi},\quad \frac{\partial\theta}{\partial\psi}=-\frac{K\rho}{r}\frac{\partial\ln q}{\partial\varphi}-\frac{1}{r^2\rho}\frac{\partial r}{\partial\varphi}, \tag{11}$$

$$\theta=\operatorname{arctg}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right),\quad K=\frac{1}{\rho^3}\frac{d}{dq}(\rho q).$$

При этом условия (6), (7) примут вид

$$q=q_0 \text{ при } \psi=\psi^\pm \text{ и } \varphi=\varphi_1, \tag{12}$$

$$\theta=0 \text{ при } \psi=+0 \text{ и } \varphi=\varphi_0^+;\ \theta=\pi \text{ при } \psi=-0 \text{ и } \varphi=\varphi_0^-. \tag{13}$$

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{\partial x_3}{\partial\varphi}=R\rho\frac{\partial r}{\partial\psi},\quad \frac{\partial r}{\partial\varphi}=-R\rho\frac{\partial x_3}{\partial\varphi}, \tag{10$^\varepsilon$}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}=R\rho\frac{\partial\ln q}{\partial\psi},\quad \frac{\partial\theta}{\partial\psi}=-\frac{K\rho}{R}\frac{\partial\ln q}{\partial\varphi}-\frac{R'}{R^2\rho}\frac{\partial r}{\partial\varphi}, \tag{11$^\varepsilon$}$$

где $R(r)=1-\lambda+\lambda R_\varepsilon$, $R_\varepsilon=(r+\varepsilon)/(1+\varepsilon r)$, $0<\varepsilon<1$, $\lambda\in[0,1]$, $r\geqslant 0$.

Будем предполагать пока, что

$$\|\ln\rho(q)\|_{C_\alpha^m}\leqslant\nu,\quad 0\leqslant q\leqslant q_0,\quad m\geqslant 1,\quad \alpha>0, \tag{14}$$

$$K=\frac{1}{\rho^3}\frac{d}{dq}(\rho q)\geqslant\nu_1>0,\quad 0\leqslant q\leqslant q_0. \tag{15}$$

Лемма 1. *Пусть выполнено* (14), (15). *Тогда при всех* $\varepsilon>0$, $\lambda=1$ *и заданных параметрах* $\psi^-<0<\psi^+$, $\varphi_0^\pm<0$, $\varphi_1>0$, $\delta>0$ (*достаточно малое число*) *существует решение задачи* (10$^\varepsilon$), (11$^\varepsilon$), (12), (13) *такое, что*

$$x_3(0,0)=0,\quad r(0,0)=\delta,\quad (x_3,r)\in C_\alpha^{m+1},\quad (\theta,q)\in C_\alpha^{\overline{m}}$$

в $\overline{\Omega}_\varphi$ (*за исключением угловых точек*).

Функции (x_3,r) *осуществляют при этом однолистное квазиконформное отображение области* Ω_φ *на* Ω_r: $\{x_3^-<x_3<x_3^+,\ \delta<r<C\}$.

Оценки леммы обеспечивают невырожденность систем (10$^\varepsilon$), (11$^\varepsilon$) и областей $\Omega_x^{\varepsilon,\delta}$, $\Omega_r^{\varepsilon,\delta}$ при всех $\varepsilon\geqslant 0$ ($\delta>0$), что позволяет перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$ и получить совокупность решений уравнения (1) в областях $\Omega_x^\delta=\Omega_x\cap(r>\delta)$, удовлетворяющих при $(x_1^2+x_2^2)^{1/2}=\delta$ условиям

$$\partial\varphi/\partial x_1=\partial\varphi/\partial x_2=0,\quad x_3^-<x_3<x_3^+;\quad \partial\varphi/\partial x_3=0,\quad x_3=0. \tag{16}$$

Заметим, что переход к уравнению (1) возможен лишь при $\varepsilon=0$.

Методы работ ([4], [5]) позволяют получить оценки гладкости решения, не зависящие от δ, и перейти к пределу при $\delta\to 0$. При этом устанавливаются (при $\varepsilon=0$) неравенства

$$0\leqslant\theta(\mathbf{x})\leqslant\pi,\quad \mathbf{x}\in\bar{\Omega}_x^\delta;\quad |\ln q|\leqslant C_0,\quad \mathbf{x}\in\bar{\Omega}_x^\delta\cap(|\mathbf{x}|\geqslant\varepsilon_1),\tag{17}$$

$$q(\mathbf{x})\cdot\sin\theta(\mathbf{x})\leqslant Cr,\quad \mathbf{x}\in\bar{\Omega}_x^\delta;\quad \partial q/\partial x_3\gtreqless 0,\quad r=\delta,\quad x_3\gtreqless 0,\tag{18}$$

$$C\leqslant(|x_3^\pm/\varphi_0^\pm|,\quad |r_0^\pm/\psi^\pm|)\leqslant 1/C,\tag{19}$$

где постоянные C, C_0 зависят лишь от ν, q_0, а C_0 еще от ε_1 и ν_1.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (14), (15). *Тогда задача* I.1 *всегда имеет* (*при заданных* $x_3^\pm\gtreqless 0$, $\varphi_1>0$, $r_0^\pm>0$) *по крайней мере одно решение* $\varphi(\mathbf{x})\in C_\alpha^{m+1}$ *всюду в* $\bar{\Omega}_x$ (*за исключением, может быть, линий* $L^\pm$ *стыка границ* S_x^0, S_x^1, $S_x^\pm$).

3°. Пусть теперь величина скорости на струях равна звуковой. Рассмотрим последовательность задач с $q_0^\varepsilon=q_{зв}-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$. Введем аналогично ([6]) функцию

$$u(\varphi,\psi)=\int\limits_q^{q_{зв}}\frac{\rho(s)}{s}\,ds$$

и будем предполагать, что

$$K(u)\geqslant 0,\quad K(0)=0,\quad K_u'\geqslant\nu_2>0,\quad K_{uu}''>\nu_3>0,\quad 0\leqslant u\leqslant M.\tag{20}$$

Теорема 2. *Задача* I.1 *с* $q_0=q_{зв}$ *при выполнении условий* (14) ($m=3$), (20) *всегда имеет решение* $\varphi(\mathbf{x})\in W_4^2(\Omega_x)$, $(S_x^0, S_x^1)\in C_\alpha^1$ $0<\alpha<1/4$.

Доказательство. Для доказательства достаточно установить оценки, не зависящие от ε. Сначала доказывается существование фиксированной, не зависящей от ε окрестности ($|\mathbf{x}|<\delta$) точки остановки, в которой $|\nabla\varphi|\leqslant q_{зв}/2$, и, следовательно, уравнение (1) равномерно эллиптично. Затем, вне круга ($|\mathbf{x}|<\delta/2$) с помощью (18) доказывается неравенство

$$|u|(\varphi,\psi)|\leqslant C_1(\delta,\bar{\nu}_1,C)\quad \bar{\nu}_1=\min_{2q\leqslant q_{зв}}K(q).\tag{21}$$

Далее, уточняя результаты работы ([6]) при $u\leqslant C_1$ и существенно используя (18), приходим к оценке

$$\int\limits_{\Omega^\delta_x}[Ku_{\varphi\varphi}^2+|\nabla_x u|^4]\,dx_1\,dx_2\,dx_3\leqslant C_2.$$

Следовательно, $u(\mathbf{x})\in W_4^1(\Omega_x^\delta)$. Отсюда находим, что и $\theta(\mathbf{x})\in W_4^1$, т. е. $\varphi(\mathbf{x})\in W_4^2$. Теорема 2 доказана.

Полученные оценки и не зависящее от N неравенство (21) позволяют осуществить переход при $x_3^\pm\to\pm\infty$, $\varphi_1\to\infty$. При этом в случае $q_0=q_{зв}$, аналогично работе ([7]), построением барьерной функции доказывается существование числа X такого, что при $|x_3|>X$ и $r\leqslant r_0^\pm$

$$q(\mathbf{x})\equiv q_{зв}.$$

Теорема 3. *Пусть* $q_0<q_{зв}$ *и выполнены условия* (14), (15). *Тогда задача* I *всегда имеет решение* $\varphi(\mathbf{x})\in C_\alpha^{m+1}$, $|\mathbf{x}|<N$, *свойства которого определяются леммой* 1 *и теоремой* 1.

При $q_0=q_{зв}$ *и выполнении условий* (21), (14) ($m=3$) *задача* I *всегда имеет решение* $\varphi(\mathbf{x})\in W_4^2$, $|\mathbf{x}|<N$.

Относительно задачи II сформулируем лишь результат при $q_0=q_{зв}$.

Теорема 4. *Если заданные границы* S_x^1, S_x^2 *удовлетворяют условиям*

$$f_k\in C^4,\ f_1\equiv\mathrm{const}\ \text{при}\ |x_3|>X\ \ (X\ \text{достаточно велико}),$$

$$(-1)^k f_k''\geqslant 0,\quad k=1,2,\quad |\ln|r-f_r(r)||\leqslant\nu_4,\quad r\in S_x^1,$$

то при выполнении (14) ($m=3$) *и* (21) *задача* II *всегда имеет решение* $\varphi(\mathbf{x})\in W_4^2$, $|\mathbf{x}|<X$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность В. Н. Монахову за постоянное внимание к данной работе.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
23 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат,* Проблемы гидродинамики и их математические модели, М., 1973. [2] *И. И. Данилюк, Л. Н. Тарасенко,* т. 23, № 6, 723 (1971). [3] *Л. В. Овсянников,* ПММ, т. 13, в. 5 (1949). [4] *В. Н. Монахов,* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений, Новосибирск, ч. II, 1969. [5] *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева,* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., 1964. [6] *Т. Б. Соломяк,* Матер. к XXIX научной конференции, Ленингр. инж.-строит. инст., Л., 1971, стр. 13. [7] *С. Н. Антонцев,* Динамика сплошной среды, в. 13, 5 (1973).