Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 3

УДК 519.48 МАТЕМАТИКА

В. И. АРНАУТОВ, В. Н. ВИЗИТИУ

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЛОКАЛЬНО ОГРАНИЧЕННОЙ ТОПОЛОГИИ ПОЛЯ НА ЕГО АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РАСШИРЕНИЯ

(Представлено академиком П. С. Александровым 11 XI 1973)

Пусть R — произвольное кольцо * (без топологии) и A — некоторое его подкольцо. В общем случае существует такое кольцо R и такое его подкольцо A, что в A можно задать топологию, которая не продолжаема до топологии всего кольца R, т. е. в кольце нет такой топологии, согласующейся с операциями кольца R, которая индуцировала бы в A первоначальную топологию. Для этого достаточно взять в качестве R бесконечное кольцо, допускающее только дискретную топологию (такие кольца существуют, см. ([1]), а в качестве A некоторое счетное его подкольцо. Тогда A допускает недискретную топологию (см. ([2])) и эту топологию нельзя продлить на все кольцо R.

Однако вопрос о продолжении топологии с подкольца A на все кольцо R иногда может быть решен положительно. Так, например, если A и R — поля, причем R является алгебраическим расширением поля A и в A определена топология, задаваемая с помощью нормы, то ее можно продлить на поле R, причем полученная топология тоже задается с помощью нормы (см., например, ([4]), стр. 510).

В ([5]) доказывается теорема о возможности продолжения любой локально ограниченной топологии поля A на всякое его счетномерное алгебраическое расширение R. В настоящей работе доказывается аналогичная теорема без требования счетномерности, а именно:

Пусть R — произвольное поле, являющееся алгебраическим расширением поля A. Тогда всякая локально ограниченная топология поля A может быть продолжена до топологии поля R.

Однако метод продолжения топологии с A на R, предложенный в этой работе, не дает в общем случае локально ограниченную топологию в R. Поэтому пока остается неясным вопрос о возможности продолжения локально ограниченной топологии с A до локально ограниченной топологии поля R.

З а м е ч а н и е 1. Всякое локально ограниченное ассоциативное кольцо R обладает таким базисом $\{V_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ окрестностей нуля, что: 1) V_0 является ограниченным окрестностью нуля в R и подполугруппой мультипликативной полугруппы кольца R. 2) Для каждого $\gamma \in \Gamma$ окрестность V_γ является идеалом в полугруппе V_0.

Итак, пусть A — произвольное локально ограниченное поле и $\{V_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ — базис симметричных окрестностей нуля. Не нарушая общности, можем считать, что V_0 является подполугруппой мультипликативной полугруппы поля A и ограниченной окрестностью нуля, а остальные V_γ — идеалами полугруппы V_0.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ всех таких последовательностей $\Delta = \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ индексов из Γ, что $V_{\gamma_{i+1}} + V_{\gamma_{i+1}} \leqslant V_{\gamma_i}$ и $V_{\gamma_1} + V_{\gamma_1} \leqslant V_0$.

Для каждой последовательности $\Delta = \gamma_1, \gamma_2, \ldots \in \mathfrak{M}$ можно определить на A такую вещественную функцию $\xi_\Delta(a) \geqslant 0$, что выполнены условия:

* Под кольцом понимается не обязательно ассоциативное кольцо.

1) если $a \in V_{\gamma_k}$, то $\xi_\Delta(a) \leqslant 2^{-k+1}$; 2) если $\xi_\Delta(a) \leqslant 2^{-k}$, то $a \in V_{\gamma_k}$; 3) $\xi_\Delta(a+b) \leqslant \xi_\Delta(a) + \xi_\Delta(b)$.

Для этого достаточно в лемме 2 из (3) взять $U_i = A$, если $i \leqslant 3$, и $U_i = V_{\gamma_{i-3}}$, если $i > 3$.

Замечание 2. Если $\Delta = \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ и $\Delta' = \gamma_1', \gamma_2', \ldots$ — такие последовательности из $\mathfrak{M}$, что $V_{\gamma_i'} \subseteq V_{\gamma_{i+2}}$ для всех $i \geqslant 1$, то $\xi_{\Delta'}(a) \geqslant \xi_\Delta(a)$ и $\xi_{\Delta'}(a) \geqslant \xi_\Delta(-a)$ для любого $a \in V_{\gamma_1'}$.

Замечание 3. Для произвольной последовательности $\Delta = \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ и любых элементов $a \in V_0$ и $b \in V_{\gamma_1}$ $\xi_\Delta(ab) \leqslant 4\xi_\Delta(-b)$.

Пусть $X = \{x_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ — произвольное множество переменных, занумерованное элементами из вполне упорядоченного множества Ω, и U — множество всевозможных ассоциативно-коммутативных слов от множества переменных X (единицу поля A тоже будем считать словом), и пусть каждому элементу $u \in A$ поставлено в соответствие некоторое число $s(u)$, так что $s(1) = 1$ и $s(u_1 \cdot u_2) = s(u_1) \cdot s(u_2)$ для любых $u_1, u_2 \in U$.

Обозначим через $A(X)$ коммутативное кольцо многочленов от множества переменных X над полем A. Для каждого $\alpha \in \Omega$ рассмотрим многочлен $\varphi_\alpha = x_\alpha^{n_\alpha} + \sum\limits_{i=0}^{n_\alpha - 1} \sum\limits_{k \in K_\alpha} b_{i,k,\alpha} \cdot u_{i,k,\alpha} x_\alpha^i$ из $A(X)$, где $b_{i,k,\alpha} \in V_0$, а $u_{i,k,\alpha}$ — элементы из U, не зависящие от x_ρ для $\rho \geqslant \alpha$, причем $u_{i,k_1,\alpha} \neq u_{i,k_2,\alpha}$ и $s(x_\alpha) > \sum\limits_{i,k} s(u_{i,k,\alpha})$. Если $\Phi = \{\varphi_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$, то через I_Φ обозначим идеал в $A(X)$, порожденный множеством Φ.

Пусть $\mathfrak{N}$ — множество всех неубывающих последовательностей неотрицательных целых чисел. Для любых последовательностей $M = m_1, m_2, \ldots$ и $N = k_1, k_2, \ldots$ из $\mathfrak{N}$ и произвольной последовательности $\Delta = \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ из $\mathfrak{M}$ определим множество $W_{M,N,\Delta}$ всех таких элементов f из $A(X)$, для каждого из которых существует такая конечная последовательность $u_1, \ldots, u_p$ элементов из U, что f можно записать в виде $\sum\limits_{i=1}^{p} a_i u_i$, где $a_i \in A$, причем при этой нумерации выполнено неравенство $\sum\limits_{i=1}^{p} (2^{m_{s(u_i)}} \cdot 2^{k_i} \xi_\Delta(a_i)) < 1$.

Доказываются следующие свойства множеств $W_{M,N,\Delta}$:

I. Для любых множеств $W_{M,N,\Delta}$ и $W_{M',N',\Delta'}$ существует такое множество $W_{M'',N'',\Delta''}$, что $W_{M'',N'',\Delta''} \leqslant W_{M,N,\Delta} \cap W_{M',N',\Delta'}$.

II. Для любого множества $W_{M,N,\Delta}$ существует такое множество $W_{M',N',\Delta'}$, что $W_{M',N',\Delta'} - W_{M',N',\Delta'} \subseteq W_{M,N,\Delta}$.

III. Для любого множества $W_{M,N,\Delta}$ существует такое множество $W_{M',N',\Delta'}$, что $W_{M',N',\Delta'} \cdot W_{M',N',\Delta'} \subseteq W_{M,N,\Delta}$.

IV. Для произвольного элемента $f \in A(X)$ и любого множества $W_{M,N,\Delta}$ существует такое множество $W_{M',N',\Delta'}$, что $f \cdot W_{M',N',\Delta'} \subseteq W_{M,N,\Delta}$.

V. Пусть $f = \sum\limits_{j=1}^{r} a_j' u_j'$ — такой многочлен из кольца $A(X)$, что в любом слове u_j' каждая переменная x_α входит не более чем $n_\alpha - 1$ раз (см. n_α в определении многочленов φ_α) и $u_{j_1}' \neq u_{j_2}'$. Если $f \in W_{M,N,\Delta} + I_\Phi$, где $\Delta = \gamma_1, \gamma_2, \ldots \in \mathfrak{M}$, и $M = m_1, m_2, \ldots$, $N = k_1, k_2 \ldots$ — такие последовательности из $\mathfrak{N}$, что $m_1 \geqslant 1$, $2^2 i \cdot 2^{m_{i-1}} < 2^{m_i}$ и $n_i = 0$, то $a_j' \in V_{\gamma_1}$ для всех $j \leqslant r$.

Лемма 1. *Любой элемент $f \in A(X)$ может быть представлен в виде $f' + f''$, где $f' \in I_\Phi$, а в многочлене f'' каждая из переменных x_α входит в степени не большей чем $n_\alpha - 1$.*

Лемма 2. *Если поле R является алгебраическим расширением своего подполя A и в A определена некоторая недискретная топология, то для любой окрестности нуля V_0 в A существуют такие трансфинитные последовательности подполей $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots$ поля R, элементов $a_0, a_1, \ldots$ из R и многочленов $\psi_0(y), \psi_1(y), \ldots$ от одного переменного y над R, что выпол-*

нены следующие условия:

A) $\bigcup_\alpha A_\alpha = R$;

B) $A_0 = A$;

C) A_α — *минимальное подполе в* R, *содержащее подполе* A *и множество* $\{a_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$, *причем* $a_\alpha \notin A_\gamma$ *для* $\gamma < \alpha$;

D) $\psi_\alpha(y)$ — *неприводимый многочлен некоторой степени* n_α *над полем* $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ *и может быть записан в виде* $y^{n_\alpha} + \sum_{i=0}^{n_\alpha - 1} \sum_{k \in K_{i,\alpha}} b_{i,k,\alpha} \cdot z_{i,k,\alpha} \cdot y^i$, *где* $b_{i,k,\alpha}$ — *элементы из* A, *принадлежащие окрестности* V_0, *а каждое* $z_{i,k,\alpha}$ *имеет вид* $a_{\beta_1}^{r_1} a_{\beta_2}^{r_2} \ldots a_{\beta_l}^{r_l}$ *для* $\beta_i < \alpha$, *и* $r_i < n_{\beta_i}$, *причем* $z_{i,k_1,\alpha} \neq z_{i,k_2,\alpha}$;

E) *каждый элемент* a_α *является корнем многочленов* $\psi_\alpha(y)$, т. е. $\psi_\alpha(a_\alpha) = 0$;

F) *для любого* α *любой элемент* $d \in A_\alpha$ *представим единственным образом в виде* $b_0 + \sum_{i=1}^{p} b_i z_i$, *где* $b_i \in A$, *а* z_i *имеют вид* $a_{\alpha_1}^{r_1} \cdot a_{\alpha_2}^{r_2} \ldots a_{\alpha_k}^{r_k}$, *где* $0 < \alpha_j \leqslant \alpha$, $0 < r_j < n_{\alpha_j}$ *и* $z_i \neq z_j$.

Теорема 1. *Пусть* R — *произвольное поле, являющееся алгебраическим расширением поля* A. *Тогда всякая локально ограниченная кольцевая топология в* A *может быть продолжена до кольцевой топологии в* R.

Доказательство. Если в A определена дискретная топология, то дискретная топология в R является ее продолжением на все R. Поэтому будем считать, что в A задана недискретная топология.

Пусть $\{V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ — некоторый базис окрестностей нуля в заданной топологии кольца A. Не нарушая общности, можем считать, что V_0 является ограниченной окрестностью нуля и подполугруппой мультипликативной полугруппы кольца A, а остальные V_γ являются идеалами в полугруппе V_0.

Пусть $\{A_\alpha \mid \alpha < \beta_0\}$, $\{a_\alpha \mid \alpha < \beta_0\}$ и $\{\psi_\alpha(y) \mid \alpha < \beta_0\}$ — трансфинитные последовательности соответственно подполей, элементов из R и многочленов над R, построенные в лемме 2. Рассмотрим множество $X = \{x_\alpha \mid \alpha < \beta_0\}$ переменных, занумерованное теми же трансфинитными числами, что и элементы указанных выше последовательностей, и коммутативное кольцо $A(X)$ многочленов от множества переменных X над полем A.

Через φ_α обозначим элемент из $A(X)$, который получается, если в записи многочлена $\psi_\alpha(y)$ (см. условие D) леммы 2) подставим вместо y переменную x_α, а вместо a_β переменную x_β для всех $\beta < \alpha$.

Тогда $\varphi_\alpha = x_\alpha^{n_\alpha} + \sum_{i=0}^{n_\alpha - 1} \sum_{k \in K_{i,\alpha}} b_{i,k,\alpha} \cdot u_{i,k,\alpha} \cdot x_\alpha^i$, где $b_{i,k,\alpha} \in V_0$, а $u_{i,k,\alpha}$ — одночлены, в которых переменные x_ρ для $\rho \geqslant \alpha$ не входят, а переменные x_ρ для $\rho < \alpha$ входят в степенях не больше, чем $n_\rho - 1$, причем $u_{i,k_1,\alpha} \neq u_{i,k_2,\alpha}$.

Пусть $\Phi = \{\varphi_\alpha \mid \alpha < \beta_0\}$ и I_Φ — идеал в $A(X)$, порожденный множеством Φ. Если U — множество всех ассоциативно-коммутативных слов от переменных X, то для каждого элемента $u \in U$ определим число $s(u)$ следующим образом. Положим $s(1) = 1$ (единицу поля A считаем словом от пустого множества переменных). Допустим теперь, что числа $s(u)$ определены для всех слов от переменных x_γ для $\gamma < \alpha$, причем $s(u_1 \cdot u_2) = s(u_1) \cdot s(u_2)$. Если u — произвольное слово от переменных x_γ для $\gamma \leqslant \alpha$, то $u = u_1 \cdot x_\alpha^r$, где u_1 — слово от переменных x_γ для $\gamma < \alpha$ и r — некоторое натуральное число.

Возьмем $s(u) = s(u_1) [1 + \sum_{i,k} s(u_{i,k,\alpha})]^r$, где $u_{i,k,\alpha}$ пробегает множество всех слов в записи многочлена φ_α.

Таким образом, для любого элемента $u \in U$ определено число $s(u)$, причем выполнены условия: 1) $s(u_1 \cdot u_2) = s(u_1) \cdot s(u_2)$, 2) $s(x_\alpha) > \sum_{i,k} s(u_{i,k,\alpha})$ для любого α.

С помощью функции $s(u)$ и базиса $\{V_\alpha | \gamma \in \Gamma\}$ окрестностей нуля поля A определим, как это сделано выше, совокупность $\{W_{M,N,\Delta} | M, N \in \mathfrak{N}, \Delta \in \mathfrak{M}\}$ подмножеств в кольце $A(X)$. Тогда множества $W_{M,N,\Delta}$ удовлетворяют свойствам I—V.

Если теперь ζ — такое отображение множества X на множество $\{a_\alpha | \alpha < \beta_0\}$, что $\zeta(x_\alpha) = a_\alpha$, то его можно продолжить до такого гомоморфного отображения ζ кольца $A(X)$ на поле R, что $\zeta(b) = b$ для любого элемента $b \in A$ и $\zeta^{-1}(0) = I_\Phi$.

Учитывая, что множества $W_{M,N,\Delta}$ удовлетворяют свойствам I—V, с помощью леммы 1 доказывается, что совокупность множеств $\overline{W}_{M,N,\Delta} = \zeta(W_{M,N,\Delta})$ можно взять в качестве базиса окрестностей нуля, чтобы превратить R в топологическое кольцо, причем эта топология в подкольце A индуцирует исходную топологию.

Теорема 2. *Пусть R — произвольное поле, являющееся алгебраическим расширением поля A. Тогда всякая локально ограниченная топология поля A может быть продолжена до топологии поля R.*

Доказательство. Пусть $\{\overline{W}_{M,N,\Delta} | M, N \in \mathfrak{N}, \Delta \in \mathfrak{M}\}$ — базис окрестностей нуля в кольце R, построенный по теореме 1. Тогда проверяется, что совокупность всех подмножеств $U_{M,N,\Delta} = \dfrac{\overline{W}_{M,N,\Delta}}{1 + \overline{W}_{M,N,\Delta}}$ в R может быть взята в качестве базиса окрестностей нуля, чтобы превратить R в топологическое поле (т. е. в такое топологическое кольцо, в котором отображение $b \to b^{-1}$ является непрерывным), причем полученная топология индуцирует в подполе A исходную топологию.

Институт математики с Вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев

Поступило
2 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. И. Арнаутов*, В сборн. Математические исследования, Кишинев, т. 5, 3 (17) (1970). [2] *В. И. Арнаутов*, Сибирск. матем. журн., т. 9, № 6 (1968). [3] *В. И. Арнаутов*, Алгебра и логика, т. 4, № 4 (1964). [4] *Н. Бурбаки*, Коммутативная алгебра, М., 1971. [5] *L. Hinrichs*, Trans. Am. Math. Soc., v. 113 (1964).