Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 3

УДК 62-50:519.25 МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. А. КРАСОВСКИЙ, В. Н. БУКОВ

ИТЕРАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова можно записать в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(f_ip)-\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}S_{i,k}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_k}=\frac{\partial p}{\partial t}+Lp=0; \tag{1}$$

здесь $p=p(x_1,\ldots,x_n,\ t)$ — плотность вероятности в фазовом пространстве динамической системы $\dot{x}_i+f_i=\xi_i$, $i=1,\ 2,\ldots,n$, $S_{i,k}$ — спектральные плотности и взаимные спектральные плотности шумов ξ_i,

$$L=-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}+f_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)-\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}S_{i,k}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k} \tag{2}$$

линейный оператор. Распределение вероятности в начальный момент времени $t=0$ задано:

$$p(x_1,\ldots,x_n,\ 0)=p_0(x_1,\ldots,x_n). \tag{3}$$

В работах ([1], [2]) для случая, когда функции $f_i=f_i(x_1,\ldots,x_n,\ t)$ аналитические, развит приближенный метод решения уравнения (1) с помощью степенного ряда по x_i для $\ln p$. Недостатком этого метода, помимо ограниченности f_i классом аналитических функций, является трудность получения оценок сходимости решения.

В данной работе рассматривается другой метод приближенного решения уравнения (1), который может быть назван итерационным. В интересах простоты метод излагается для случая, когда функции f_i и величины $S_{i,k}$ не зависят явным образом от времени t (стационарная динамическая система). Обобщение на случай нестационарной системы несложно.

Допустим, что функции $\mathbf{f}=(f_1,\ldots,f_n)$, p_0 таковы, что для области G фазового пространства можно указать такое положительное число D и целые числа $d\geqslant 0$ и $\mu>d$, что для любого $x=(x_1,\ldots,x_n)\in G$ и натурального числа $\nu\geqslant\mu$ справедливо неравенство

$$|L^\nu p_0|\leqslant\frac{\nu!p_0}{(\nu-d)!}D^\nu. \tag{4}$$

Тогда решение уравнения (1) может быть представлено в виде ряда

$$p=\left(1-\frac{t}{1!}L+\frac{t^2}{2!}L^2-\ldots\right)p_0=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{t^\nu}{\nu!}L^\nu p_0, \tag{5}$$

который можно записать символически

$$p=\exp(-tL)\,p_0. \tag{6}$$

При условии (4), которое, конечно, является только достаточным, но не необходимым, ряд (5) равномерно сходится в области G. Равномерно сходятся и ряды, получающиеся дифференцированием $\partial p/\partial t$, Lp. Подставляя (5) в уравнение (1), убеждаемся, что оно удовлетворяется. Выполняется также начальное условие (3). Итак, (5) действительно является искомым решением.

В случае отсутствия шумов ($S_{i,k}=0$) в точке равновесия ($f=0$) оператор (2) вырождается в след якобиана

$$L = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

При непрерывных функциях f_i в достаточно малой окрестности равновесной точки

$$L \approx -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \qquad (7)$$

Из (7), (5) или (6) вытекает приближенное выражение текущей плотности вероятности в малой окрестности равновесной точки системы без шумов

$$p \approx p_0 \exp\left(t \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right). \qquad (8)$$

Динамические системы, у которых $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$, можно назвать обобщенно консервативными. Для таких систем в малой окрестности равновесной точки

$$L \approx -\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} S_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_k}.$$

Нетрудно показать, что если ряд

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \frac{t}{1!} \sum_{i,k=1}^{n} S_{i,k} \frac{\partial^2 p_0}{\partial x_i \, \partial x_k} + \frac{1}{2^2} \frac{t^2}{2!} \sum_{i,k,j,l=1}^{n} S_{i,k} S_{j,l} \frac{\partial^4 p_0}{\partial x_i \, \partial x_k \, \partial x_j \, \partial x_l} + \ldots,$$

полученный из (5), сходится, то он сходится к функции

$$p = \frac{1}{\left((2\pi t \det S)^{1/2} \right)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int p_0(\eta_1, \ldots, \eta_n) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2t} \sum_{i,k=1} S_{i,k}^{(-1)} (x_i - \eta_i)(x_k - \eta_k) \right] d\eta_1 \ldots d\eta_n, \qquad (9)$$

являющейся точным решением уравнения теплопроводности, в которое вырождается уравнение (1) при указанных условиях. В формуле (9) $S_{i,k}^{(-1)}$ — элемент обратной матрицы $S^{-1} = \|S_{i,k}\|^{-1}$, $\det S$ — определитель матрицы S.

Суммирование бесконечного ряда (5) в общем виде возможно лишь в особых случаях. Ограничиваясь суммой первых μ членов ряда, получаем приближенное решение

$$p_* = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} (-1)^\nu \frac{t^\nu}{\nu!} L^\nu p_0, \qquad p = p_* + R_\nu.$$

Модуль остатка ряда $|R_\nu|$ в области G в соответствии с (4) не превышает величины

$$R_{d,\mu}(Dt)=p_0\sum_{\nu=\mu}^{\infty}t^\nu\frac{D^\nu}{(\nu-d)!}=$$

$$=p_0(Dt)^d\left[\exp(Dt)-1-\frac{Dt}{1!}-\ldots-\frac{(Dt)^{\mu-d-1}}{(\mu-d-1)!}\right]. \qquad (10)$$

На рис. 1 представлены зависимости достаточного числа членов ряда (5) для обеспечения относительной ошибки приближения p, не превышающей $R_{d,\mu}/p_0=0{,}05$, от приведенного времени $\tau=Dt$ и параметра d.

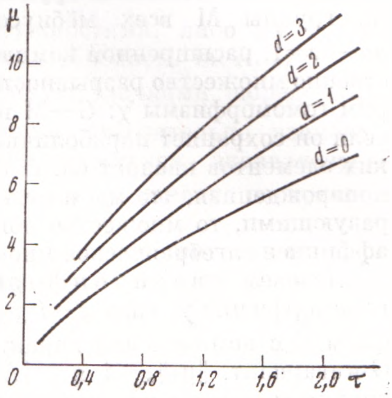

Рис. 1

При больших τ для достижения заданной точности может потребоваться вычисление большого числа членов ряда (5). В этом случае более экономной может оказаться следующая процедура. Все время переходного процесса в динамической системе, предполагаемой устойчивой в статистическом смысле, разбивается на интервалы. Для первого интервала приближенное решение строится указанным образом. Полученное в конце интервала приближенное распределение вероятности принимается за начальное для второго интервала и процедура повторяется для всех последующих интервалов.

Изложенный метод легко обобщается на уравнение вида

$$\frac{\partial^m p}{\partial t^m}+Lp=0, \qquad (11)$$

где L — произвольный линейный стационарный оператор по x,

$$p_{t=0}=p_0,\quad \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{t=0}=\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_0,\ldots,\left(\frac{\partial^{m-1}p}{\partial t^{m-1}}\right)_{t=0}=\left(\frac{\partial^{m-1}p}{\partial t^{m-1}}\right)_0 \qquad (12)$$

— заданные начальные условия.

Если ряд

$$p=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\sum_{\varepsilon=0}^{m-1}\frac{t^{m\nu+\varepsilon}}{(m\nu+\varepsilon)!}L^\nu\left(\frac{\partial^\varepsilon p}{\partial t^\varepsilon}\right)_0 \qquad (13)$$

равномерно сходится в области G с его производными, входящими в (11), то он сходится к решению уравнения (11), удовлетворяющему начальным условиям (12).

Военно-воздушная инженерная академия
им. Н. Е. Жуковского
Москва

Поступило
2 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. А. Красовский*, ДАН, т. 205, № 3, 550 (1972). [2] *А. А. Красовский*, Техническая кибернетика, № 6, 200 (1972).