Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 3

УДК 517.54:517.862 МАТЕМАТИКА

С. Л. КРУШКАЛЬ

СТАБИЛЬНОСТЬ КЛЕЙНОВЫХ ГРУПП

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 29 XI 1973)

Пусть G — клейнова группа, т. е. дискретная неэлементарная подгруппа группы M всех мёбиусовых автоморфизмов $g(z)=(az+b)/(cz+d)$, $ad-bc=1$, расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$; $\Omega(G)$ и $\Lambda(G)$ — соответственно множество разрывности и предельное множество группы G. Рассмотрим гомоморфизмы χ: $G\to$ M и назовем гомоморфизм χ допустимым, если он сохраняет параболичность и эллиптичность элементов, т. е. для таких элементов квадрат следа $\mathrm{tr}^2\,\chi(g)=\mathrm{tr}^2\,g\equiv(a+d)^2$. Если группа G конечнопорожденная, что мы и будем всюду в дальнейшем предполагать, с r образующими, то множество допустимых гомоморфизмов G есть r-мерное аффинное алгебраическое многообразие (см. [1]).

Назовем квазиконформными деформациями группы G гомоморфизмы χ_f вида $g\to f\circ g\circ f^{-1}$, $q\in G$, где f — квазиконформный автоморфизм $\overline{\mathbf{C}}$ с комплексной характеристикой $\mu_f=f_{\bar z}/f_z$ такой, что $\mu_f=d\bar z/dz$ — G-инвариант, $\|\mu_f\|_\infty<1$ и $\mu_f|\Lambda(G)=0$. Тогда $G_f=fGf^{-1}$ — также клейнова группа, χ_f — изоморфизм G на G_f, допустимый для G. Группа G называется (квазиконформно) стабильной, если всякий допустимый гомоморфизм χ: $G\to$M, достаточно близкий к тождественному в том смысле, что для некоторой системы образующих $g_1,\ldots,g_r$ группы G их образы $\chi(g_j)$ близки к самим g_j, $j=1,\ldots,r$, индуцируется квазиконформным автоморфизмом f: $\overline{\mathbf{C}}\to\overline{\mathbf{C}}$ с малым $k(f)=\|\mu_f\|_\infty$. Если же указанным свойством обладают только $\chi=\chi_f$, т. е. квазиконформные деформации G, то группа G называется условно стабильной.

Некоторые признаки стабильности групп установлены в [1, 2]. Например, квазифуксовы (и в частности, фуксовы) группы стабильны.

Л. Берс высказал гипотезу, что любая конечно-порожденная клейнова группа условно стабильна (см. [3, 4]). Здесь мы докажем теорему, устанавливающую справедливость этого утверждения.

Обозначим через $\|\chi_f(g)-g\|$ максимум модулей разности между соответствующими коэффициентами преобразований g и $\chi_f(g)$.

Теорема. *Существует $\varepsilon_0>0$ такое, что при $\varepsilon<\varepsilon_0$ каждая квазиконформная деформация χ_f: $G\to$M, обладающая тем свойством, что для некоторой системы Σ: $g_1,\ldots,g_r$ образующих G выполняется неравенство $\max\limits_j\|\chi_f(g_j)-g_j\|\leqslant\varepsilon$, индуцируется квазиконформным автоморфизмом f_ε: $\overline{\mathbf{C}}\to\overline{\mathbf{C}}$ с $k(f_\varepsilon)<\eta(\varepsilon)$, где $\eta(\varepsilon)\to0$ при $\varepsilon\to0$. Постоянная ε_0 зависит только от G и Σ*

Доказательство. Так как G конечно-порождена, то $\Omega(G)/G$ есть объединение $\bigcup\limits_{j=1}^N S_j$ конечного числа римановых поверхностей S_j конечного типа (ρ_j, n_j) и соответствующие компоненты связности $\Omega(G)$ разветвлены над S_j каждая в конечном числе точек, являющихся проекциями эллиптических неподвижных точек G при отображении π: $\Omega(G)\to\Omega(G)/G$ [5]. Найдется N неэквивалентных между собой компонент $\Omega_1,\ldots,\Omega_N$ множества $\Omega(G)$, которым эквивалентны все остальные. Обозначим через $E(G)$ множество неподвижных точек эллиптических элементов G (если их нет, $E(G)=\emptyset$) и положим $\Omega_0(G)=\Omega(G)\setminus E(G)$, $\Omega_{0j}=\Omega_j\setminus E(G)$, $S_{0j}=S_j\setminus\pi(E(G))$.

Пусть P_G — фундаментальное множество группы G, лежащее в $\bigcup\limits_{j=1}^{N}\Omega_j$, для определенности ограниченное дугами окружностей (ср. ([6])), и $P_{\Omega_j}=P_G\cap\Omega_j$. Тогда стороны P_{Ω_j} попарно эквивалентны между собой, а преобразования $g_{1,j},\ldots,g_{m_j,j}$, переводящие эти эквивалентные стороны друг в друга, порождают подгруппу $G_{\Omega_j}=\{g\in G:\ g(\Omega_j)=\Omega_j\}$. Так как $g_{k,j}$ выражаются через $g_1,\ldots,g_r$, то

$$\|\chi_f(g_{k,j})-g_{k,j}\|<C\varepsilon,\quad k=1,\ldots,m_j,\quad j=1,\ldots,N;\quad C=\mathrm{const}<\infty. \quad (1)$$

Каждая область $\operatorname{int}P_{\Omega_j}$ конечно-связна и ее эквивалентные граничные дуги $l_{k,j}$, $l'_{k,j}=g_{k,j}(l_{k,j})$ являются либо окружностями, либо их дугами. В силу (1) и допустимости χ_f можно построить область $\operatorname{int}P_{f,\Omega_j}$ той же степени связности, что и $\operatorname{int}P_{\Omega_j}$, ограниченную гладкими жордановыми кривыми $l_{f,k,j}$, $l'_{f,k,j}$, попарно эквивалентными относительно элементов $\chi_f(g_{k,j})$, с $\rho(l_{f,k,j},l_{k,j})<C'\varepsilon$, $k=1,\ldots,m_j$. Отождествляя эквивалентные точки сторон $l_{f,k,j}$, $l'_{f,k,j}$ вне $f(E(G))$, получим риманову поверхность $S_{0f,j}$ того же типа, что и S_{0j}.

Если $\operatorname{int}P_{\Omega_j}$ не односвязна, то проведем в ней дополнительные разрезы $\sigma_{i,j}$ так, чтобы они соединяли эквивалентные точки $l_{i,j}$, $l'_{i,j}$ и определяли замкнутые кривые $\hat\sigma_{i,j}=\pi(\sigma_{i,j})$ на S_{0j}, образующие вместе с $\pi(\partial P_{\Omega_j})$ рассечение S_{0j}; тогда поверхность $S_{0j}\setminus[\pi(\partial P_{\Omega_j})\bigcup(\bigcup\limits_i\hat\sigma_{i,j})]$, а вместе с ней и область $\tilde P_{\Omega_j}=(\operatorname{int}P_{\Omega_j})\setminus(\bigcup\limits_i\sigma_{i,j})$, односвязна. В $\operatorname{int}P_{f,\Omega_j}$ проведем $C'\varepsilon$-близкие к $\sigma_{i,j}$ аналогичные кривые $\sigma_{f,i,j}$, определяющие кривые $\hat\sigma_{f,i,j}$ на $S_{0f,j}$, и положим $(\operatorname{int}P_{f,\Omega_j})\setminus(\bigcup\limits_i\sigma_{i,j})=\tilde P_{f,\Omega_j}$. В $\tilde P_{\Omega_j}$ найдется замкнутый круг $\bar Q_z{}^j$: $|z-z_j|\leqslant\tau_j$, принадлежащий $\tilde P_{f,\Omega_j}$ при всех $\varepsilon<\varepsilon_1$, если ε_1 достаточно мало.

Рассмотрим теперь голоморфные универсальные накрывающие отображения h_j: $U_j\to\Omega_{0j}$, $j=1,\ldots,N$, где U_j — круг $|\zeta|<R_j$ такой, что $h_j(0)=z_j$, $h_j'(0)=1$. Им соответствуют фуксовы группы H_j преобразований наложения U_j над Ω_{0j} и фуксовы группы Γ_j преобразований наложения U_j над S_{0j}, образующие при каждом j точную последовательность

$$1\longrightarrow H_j\xrightarrow{i}\Gamma_j\xrightarrow{\chi_{h_j}}G_{\Omega_j}\longrightarrow1,\quad j=1,\ldots,N,$$

где 1 — тривиальная группа, i — вложение, χ_{h_j} — униформизирующий гомоморфизм, определенный по формуле $h_j\circ\gamma=\chi_{h_j}(\gamma)\circ h_j$, $\gamma\in\Gamma_j$. Заметим, что Γ_j порождается преобразованиями $\gamma_{1,j},\ldots,\gamma_{m_j,j}$, переводящими дуги-прообразы $h_j^{-1}(l_{k,j})$ и $h_j^{-1}(\sigma_{i,j})$ в им эквивалентные дуги, ограничивающие вместе с самими $h_j^{-1}(l_{k,j})$, $h_j^{-1}(\sigma_{i,j})$ фундаментальный многоугольник группы Γ_j, содержащий $\zeta=0$. При этом функция $h_j^{-1}(z)$ однолистна в $\tilde P_{\Omega_j}$ и продолжается до конформного отображения S_{0j} на U_j/Γ_j.

Отобразив теперь универсальную накрывающую поверхности $S_{0f,j}$ конформно на круг $U_{j\varepsilon}$: $|\zeta|<R_{j\varepsilon}$, получим аналогичные фуксовы группы $H_{f,j}$, $\Gamma_{f,j}$ и точную последовательность $1\longrightarrow H_{f,j}\xrightarrow{i}\Gamma_{f,j}\xrightarrow{\chi_{h_{j\varepsilon}}}G_{f_{f(\Omega_j)}}\longrightarrow1$; здесь $h_{j\varepsilon}$ — униформизирующее конформное отображение $U_{j\varepsilon}\to S_{0f,j}$, которое также нормируем условиями $h_{j\varepsilon}(0)=z_j$, $h_{j\varepsilon}'(0)=1$. Функция $h_{j\varepsilon}^{-1}(z)$ однолистна в $\tilde P_{f,\Omega_j}$.

Покажем, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} R_{j\varepsilon}=R$. Допустив противное, найдем последовательность $\varepsilon_n\searrow 0$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} R_{j\varepsilon_n}=R_{j0}\neq R$. Тогда соответствующие функции $\varphi_{jn}(z)=h_{j\varepsilon_n}^{-1}(z)$ образуют в Q_{z_j} компактное семейство и можно выделить подпоследовательность, которую снова обозначим через $\{\varphi_{jn}\}$, сходящуюся к однолистной аналитической функции $\varphi_{j0}(z)$. Так как соответствующие $\tilde{P}_{f,\,\Omega_j}$ сходятся к $\tilde{P}_{\Omega_j}$ как к ядру относительно точки z_j, то $\varphi_{jn}\to\varphi_{j0}$ равномерно на компактах из $\tilde{P}_{\Omega_j}$, а следовательно, φ_{j0} продолжается до конформного отображения поверхности S_{0j}. При этом $R_{j0}<\infty$, так как G не элементарна и $\Lambda(G)$ бесконечно. Но тогда в силу равенств $h_j'(0)=1$ и $\varphi_{j0}'^{-1}(0)=1$ должно быть $\varphi_{j0}(z)=h_j^{-1}(z)$ и $R_{j0}=R_j$ вопреки допущению.

Переходя, если нужно, от $h_j(\zeta)$ и $h_{j\varepsilon}(\zeta)$ к функциям $h_j(\zeta/R_j)$ и $h_{j\varepsilon}(\zeta/R_{j\varepsilon})$, $\varepsilon<\varepsilon_1$, можно сразу считать, что все $U_{j\varepsilon}$ и U_j совпадают с кругом U: $|\zeta|<1$ и фуксовы группы $\Gamma_{f,\,j}$, Γ_j действуют в U. При этом для поверхностей S_{0j} и $S_{0f,\,j}$ имеем коммутативную диаграмму групп и гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & H_j \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha_j"] & \Gamma_j \arrow[r, "\chi_{h_j}"] \arrow[d, "\alpha_j"] & G_{\Omega_j} \arrow[r] \arrow[d, "\chi_f"] & 1 \\
1 \arrow[r] & H_{f,j} \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_{f,j} \arrow[r, "\chi_{h_{j\varepsilon}}"] \arrow[d] & G_{f_\varepsilon(\Omega_j)} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами, а также оценку

$$\|\gamma_{k,\,j}-\alpha_j(\gamma_{k,\,j})\|<\delta(\varepsilon),\quad k=1,\ldots,m_j, \tag{2}$$

где $\delta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$; $\alpha_j(\gamma_{k,\,j})$ — образующие $\Gamma_{f,\,j}$, переводящие дуги $h_{j\varepsilon}^{-1}(l_{f,\,k,\,j})$ и $h_{j\varepsilon}^{-1}(\sigma_{f,\,s,\,j})$ в эквивалентные им.

В силу квазиконформной стабильности фуксовых групп при достаточно малом $\varepsilon<\varepsilon_0\leqslant\varepsilon_1$ существует $\eta(\varepsilon)$-квазиконформный автоморфизм круга U, порождающий изоморфизм α_j и проектирующийся на Ω_{0j} в $\eta(\varepsilon)$-квазиконформный гомеоморфизм $f_{\varepsilon j}$: $\Omega_{0j}\to f(\Omega_{0j})$, причем $\chi_{f_{\varepsilon j}}=\chi_f$ для $g\in G_{\Omega_j}$. Это позволяет продолжить все $f_{\varepsilon j}$, $j=1,\ldots,N$, до единого квазиконформного гомеоморфизма f_ε: $\Omega_0(G)\to\Omega_0(G_f)$ такого, что $f_\varepsilon|\Omega_{0j}=f_{\varepsilon j}$ и $\chi_{f_\varepsilon}(g)=f_\varepsilon\circ g\circ f_\varepsilon^{-1}=\chi_f(g)$ при всех $g\in G$. Тогда гомеоморфизм $f_\varepsilon\circ f^{-1}$: $\Omega_0(G_f)\to\Omega_0(G_f)$ коммутирует с G_f и по теореме Маскита ([7]) продолжается квазиконформно в $\bar{\mathbb{C}}$, если положить $f_\varepsilon\circ f^{-1}(w)=w$ на $\Lambda(G_f)\cup E(G_f)$, т. е. $f_\varepsilon=f$ на $\Lambda(G)\cup E(G)$. Теорема доказана.

Отметим также, что при наличии оценки (2) существование искомого гомеоморфизма f_ε можно вывести и из теоремы 1 работы ([8]).

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
20 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *L. Bers*, Ann. Math., v. 91, № 3, 570 (1970). [2] *F. Gardiner, J. Kra*, Indiana Univ. Math. J., v. 21, № 11, 1037 (1972). [3] *Л. Берс*, УМН, т. 28, в. 4 (172), 153 (1973). [4] *L. Bers*, Lectures in Math., v. 155, 1970, p. 9. [5] *L. V. Ahlfors*, Am. J. Math., v. 86, № 2, 413 (1964). [6] *Л. Р. Форд*, Автоморфные функции, М.– Л., 1936. [7] *B. Maskit*, Am. J. Math., v. 93, № 3, 840 (1971). [8] *С. Л. Крушкаль*, Сибирск. матем. журн., т. 15 (1974).