Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 3

УДК 517.947.42 *МАТЕМАТИКА*

Л. И. КАМЫНИН, Б. Н. ХИМЧЕНКО

О ГРАНИЧНЫХ ОЦЕНКАХ ЛИПШИЦА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 26 I 1973)

В наших работах ([1-4]) для эллиптико-параболических уравнений 2-го порядка была решена одна из проблем Жиро — найден критерий для граничной поверхности, при котором имеет место теорема о знаке косой производной в граничной точке достижения регулярным решением своего экстремального значения. Примененный в ([1-4]) метод барьерных функций, опиравшийся только на принцип максимума, оказался плодотворным при решении другой (близкой к проблеме Жиро) задачи для эллиптико-параболического уравнения 2-го порядка — установлении критерия на граничную поверхность и поведение решения на границе, при котором решение удовлетворяет условию Липшица вблизи границы. Эта задача является частным случаем более широкой проблемы о регулярности решения эллиптико-параболического уравнения вблизи границы, изучению которой посвящено большое число работ (см., например, ([5-9])).

В настоящей работе нами показано, что регулярное решение эллиптико-параболического уравнения 2-го порядка удовлетворяет условию Липшица вблизи границы, если граничная поверхность имеет (в рассматриваемой окрестности) непрерывно меняющуюся нормаль, нигде не ортогональную гиперплоскости «эллиптических» переменных, причем модуль непрерывности нормали удовлетворяет условию Дини (это условие выполнено, в частности, для поверхностей типа Ляпунова). Показано также, что существуют поверхности с непрерывно меняющейся нормалью, модуль непрерывности которой не удовлетворяет условию Дини, вблизи которых регулярное решение эллиптико-параболического уравнения 2-го порядка не удовлетворяет условию Липшица (при любом поведении решения на границе).

Интересно отметить, что установленный нами критерий (на поведение граничной поверхности) регулярности решения в смысле Липшица вблизи границы (а именно, условие Дини) в точности совпадает с критерием, установленным в ([1, 2]) при решении проблемы Жиро о знаке косой производной решения в экстремальной точке границы. Заметим, наконец, что найденный нами критерий регулярности (в смысле Липшица) решения вблизи границы содержит не только условия на граничную поверхность, но и условие на поведение решения на границе (причем оба эти условия сводятся к условию Дини). Нами показано, что эти условия, являясь достаточными, близки и к необходимым.

Пусть $\bar{G}=G\cup\partial G$ — компактная область $(n+m)$-мерного, $n+m\geqslant 2$, эвклидова пространства

$$E_{n+m}=\{(x,t)\}=\{(x_1,\ldots,x_n;\,t_1,\ldots,t_m)\}.$$

Рассмотрим в области G эллиптико-параболический оператор 2-го порядка вида

$$\mathfrak{M}u=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{k,l=1}^{m}b_{kl}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t_k\,\partial t_l}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{m} b_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial t_k}+c(x,t)u, \tag{1}$$

где матрицы $\|a_{ij}\|$, $\|b_{kl}\|$ симметрические, а действительные функции $a_{ij}(x,t)$, $b_{kl}(x,t)$, $a_i(x,t)$, $b_k(x,t)$, $c(x,t)$, $i,j=1,2,\ldots,n$; $k,l=1,2,\ldots,m$, ограничены в G, причем $c(x,t)\leqslant 0$, $(x,t)\in G$.

Пусть для всех векторов $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_m)$, $|\lambda|\neq 0$, $|\mu|\neq\neq 0$, для $\forall(x,t)\in G$ имеют место неравенства

$$0<a_0\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\lambda_i\lambda_j\leqslant a^0\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2, \tag{2}$$

$$0\leqslant\sum_{k,l=1}^{m} b_{kl}(x,t)\mu_k\mu_l\leqslant b^0\sum_{k=1}^{m}\mu_k^2, \tag{3}$$

где a_0, a^0, b^0 — положительные постоянные.

Очевидно, равномерно эллиптический ($n\geqslant 2$, $m=0$) и равномерно параболический ($n\geqslant 1$, $m=1$) операторы являются частным случаем оператора (1).

Пусть, как и в (1), $\Pi(M^0,h)$ есть параболоид в E_{n+m}, т. е. тело, ограниченное поверхностью вращения $P(M^0,h)$ с вершиной в точке M^0 и основанием параболоида $B(M^0,h)$, лежащим в $(n+m-1)$-мерной гиперплоскости, ортогональной оси вращения и отсекающей от оси вращения (считая от вершины M^0) отрезок длины h, при этом каноническое уравнение поверхности вращения $P(M^0,h)$ в местной декартовой системе координат $(\eta,\xi)=(\eta,\xi_1,\ldots,\xi_{n+m-1})$ имеет вид

$$\eta=p(|\xi|),\quad 0\leqslant\eta\leqslant h;\quad |\xi|=\left(\sum_{i=1}^{n+m-1}\xi_i^2\right)^{1/2}, \tag{4}$$

если ось $O\eta$ имеет направление орта $M_p{}^0$ оси вращения $P(M^0,h)$, и

$$\eta=-p(|\xi|),\quad -h\leqslant\eta\leqslant 0, \tag{5}$$

если ось $O\eta$ направлена противоположно орту M^0p; при этом в тех же координатах будем иметь для (4)

$$\Pi(M^0,h)=\{(\eta,\xi);\,0<p(|\xi|)<\eta<h\} \tag{6}$$

и для (5)

$$\Pi(M^0,h)=\{(\eta,\xi);\,-h<\eta<-p(|\xi|)<0\}. \tag{7}$$

Будем считать в дальнейшем, что в (4)—(7)

$$p(s)=p_0 s\Omega(s),\ s\in[0,s_0],\ p_0=\mathrm{const}>0, \tag{8}$$

где функция Ω удовлетворяет условию (A): функция $\Omega(s)\neq 0$ и на отрезке $[0,s_0]$ есть модуль непрерывности (для самой себя), выпуклый вверх на $[0,s_0]$ и дважды дифференцируемый на $(0,s_0)$.

Через $K^{(\pm)}(M^0,h,\alpha_l)$ будем обозначать открытый конус вращения с вершиной в точке M^0, высотой $h>0$, углом раствора при вершине $2|\alpha_l|$, $0<|\alpha_l|<\pi/2$, и ортом оси вращения M^0p в случае $(+)$ (см. (6)) и $-M^0p$ в случае$(-)$ (см. (7)).

Определение. Скажем, что точка $M^0\in\partial G$ обладает по отношению к области G свойством строгой параболоидности извне (соответственно изнутри), если выполнены условия:

а) существует замкнутый параболоид $\overline{\Pi}(M^0,h_0)$ (7), (8) (соответственно, (6), (8)) с вершиной в M^0 такой, что $\overline{\Pi}(M^0,h_0)\subset CG$ (соответственно $\overline{\Pi}(M^0,h_0)\subset\overline{G}$) и $\overline{\Pi}(M^0,h_0)\cap\partial G=\{M^0\}$;

б) $M_p{}^0$-орт оси вращения параболоида $\Pi(M^0, h_0)$ не ортогонален n-мерной гиперплоскости «эллиптических» (для оператора (1)) переменных $(x_1, \ldots, x_n)$: $t_1=0, \ldots, t_m=0$, т. е. $M^0p=(\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n;\ \ \cos\beta_1, \ldots \ldots, \cos\beta_m)$, где

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_i+\sum_{k=1}^{m}\cos^2\beta_k=1,\quad \sum_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_i>0.$$

Теорема 1 (достаточное условие регулярности по Липшицу решения вблизи границы). *Пусть функция $u(x, t)$, эллиптико-параболический оператор* (1) *и точка $M^0\in\partial G$ удовлетворяют следующим условиям:*

а) *$u(x, t)$ определена в замкнутой области $\overline{G}$, причем*

$$u\in C(\overline{G});\quad \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial t_k}, \frac{\partial^2 u}{\partial t_k\,\partial t_l}\in C(G), \tag{9}$$

$i, j=1, 2, \ldots, n$; $k, l=1, 2, \ldots, m$, и

$$\mathfrak{M}u(x, t)=f(x, t)\leqslant 0,\quad (x, t)\in G,$$

где $|f(x, t)|\leqslant F$, $(x, t)\in G$, $F\equiv\text{const}>0$;

б) *для эллиптико-параболического оператора* (1) *выполнены* (2), (3);

в) *точка $M^0\in\partial G$ обладает относительно области G свойством строгой параболоидности извне, причем функция Ω из* (7), (8) *удовлетворяет условию* (A) *и условию Дини*

$$0\leqslant\int_0^s z^{-1}\Omega(z)\,dz<+\infty,\quad s\in[0, s_0]; \tag{10}$$

г) *существуют шаровая окрестность $O_{h_0}(M^0)\subset E_{n+m}$ радиуса $h_0>0$ с центром в M^0 и линейная функция $l(M^0, M)=\sum_{i=1}^{n+m-1}\alpha_i\xi_i$, где α_i, $i=1, 2, \ldots \ldots, n+m-1$, постоянные, такие, что для граничных значений функции $u(x, t)$ имеет место следующая оценка (в местной системе координат (η, ξ) (см.* (7), (8))):

$$|u(M)-l(M^0, M)-u(M^0)|\leqslant\varphi(|\xi|)$$
$$\forall M=(\eta, \xi)\in\partial G\cap O_{h_0}(M^0), \tag{11}$$

где

$$\varphi\in C[0, s_0],\quad \varphi(0)=D\varphi(0)=0,\quad \varphi(s)\geqslant 0,\quad s\in[0, s_0]; \tag{12}$$

д) *функция φ из* (11), (12) *удовлетворяет (см.* (8)) *оценке*

$$0\leqslant\varphi(s)\leqslant H_1p(s),\quad s\in[0, s_0],\quad H_1\equiv\text{const}>0. \tag{13}$$

Тогда существуют постоянные $H>0$ и $h\in(0, h_0)$ такие, что для $u(x, t)$ имеет место оценка Липшица

$$|u(M)-u(M^0)|\leqslant H|M^0M|\quad \forall M\in O_h(M^0)\cap\overline{G}.$$

Замечание 1. Если граница ∂G есть поверхность типа Ляпунова, то любая точка $M^0\in\partial G$, где нормаль к ∂G не ортогональна гиперплоскости «эллиптических» (для оператора (1)) переменных $(x_1, \ldots, x_n)$, обладает относительно области G свойством строгой параболоидности как извне, так и изнутри, причем функция $\Omega(s)=p_0s^\alpha$, $\alpha\in(0, 1]$, из (6), (8) удовлетворяет как условию (A), так и условию Дини (10).

Теорема 2 (необходимость условия Дини (10) в требовании строгой параболоидности извне теоремы 1). *Пусть при $n\geqslant 2$ функция $u(x, t)$ удовлетворяет условию* (9) *и*

$$\mathfrak{M}u(x, t)\leqslant 0,\quad (x, t)\in G, \tag{14}$$

причем для оператора (1) *в* (14) *выполнены* (2), (3). *Допустим, что функция $u(x, t)$ имеет отрицательный минимум μ в компактной области $\overline{G}$ и точка $M^0\in\partial G$ такова, что $u(M^0)=\mu<0$ (существование такой граничной* *точки следует из принципа минимума (см. [10]) для эллиптико-параболических уравнений 2-го порядка).*

Предположим, что для $M^0 \in \partial G$ выполнены условия:

а) *существует шаровая окрестность $O_{h_0}(M^0)$ такая, что*

$$u(M) > \mu \quad \forall M \in O_{h_0}(M^0) \cap \bar{G}, \quad M \neq M^0; \tag{15}$$

б) *в местной системе координат (η, ξ) (см. (7)) уравнение куска $\Gamma = \partial G \cap O_{h_0}(M^0)$ поверхности ∂G имеет вид (5), причем (см. (7)) $O_{h_0}(M^0) \setminus \Pi(M^0, h_0) \subset G$;*

в) *ось $O\eta$ в (5) не ортогональна гиперплоскости «эллиптических» (для оператора (1) из (14)) переменных и функция Ω из (5), (8) удовлетворяет условию (А), а также*

$$\int_0^{s_0} z^{-1} \Omega(z)\, dz = +\infty, \tag{16}$$

причем $D^2 p(s) \geqslant 0$, $s \in (0, s_0)$ и $\exists \gamma_0 \in (0, 1]$ такая, что

$$s^{\gamma_0} = o(\Omega(s)), \quad s \to +0.$$

Тогда точка $M^0 \in \partial G$ обладает относительно области G свойством строгой параболоидности извне и существуют постоянные $\delta_l > 0$ и $h_l \in (0, h_0)$ такие, что

$$u(M) - u(M^0) \geqslant \delta_l \cos \alpha_l |M^0 M| \int_{|M^0 M|}^{s_0} s^{-1} \Omega(s)\, ds$$
$$\forall M \in K^{(-)}(M^0, h_l, \alpha_l) \subset O_{h_0}(M^0) \cap G. \tag{17}$$

Замечание 2. Из оценки (17) в силу (16) следует, что при любом поведении функции $u(x, t)$ на границе Γ она не может удовлетворять условию Липшица вблизи Γ.

Теорема 3 (необходимость условия Дини (10) в требовании (11) теоремы 1). *Пусть при $n \geqslant 2$ функция $u(x, t)$ удовлетворяет условиям (9) и (14). Допустим, что функция $u(x, t)$ имеет отрицательный минимум μ в компактной области $\bar{G}$ и $u(M^0) = \mu < 0$, где точка $M^0 \in \partial G$ обладает относительно области G свойством строгой параболоидности изнутри, причем функция Ω из (4), (6), (8) удовлетворяет условию (А). Предположим, что для $M^0 \in \partial G$ существует окрестность $O_{h_0}(M^0)$ и функция*

$$p_1(s) = s\Omega_1(s), \quad s \in [0, s_0], \tag{18}$$

такие, что имеют место (15) и

$$u(M) - \mu \geqslant p_1(|M^0 M|) \quad \forall M \in \Gamma = \partial G \cap O_{h_0}(M^0),$$

причем функция Ω_1 из (18) является модулем непрерывности для самой себя и удовлетворяет условиям (А), (16) и

$$\Omega(s) \int_s^{\bar{s}_0} z^{-1} \Omega_1(z)\, ds \leqslant L\Omega_1(s), \quad s \in (0, s_0], \quad L = \mathrm{const} > 0.$$

Тогда существуют постоянные $\delta_l > 0$ и $h_l \in (0, h_0)$ такие, что

$$u(M) - u(M^0) \geqslant \delta_l \cos \alpha_l |M^0 M| \int_{|M^0 M|}^{s_0} s^{-1} \Omega_1(s)\, ds$$
$$\forall M \in K^{(+)}(M^0, h_l, \alpha_l) \subset O_{h_0}(M^0) \cap G.$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
23 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко, ДАН, 200, № 2, 282 (1971). [2] Они же, Сибирск. матем. журн., 13, № 4, 773 (1972). [3] Они же, ДАН, 204, № 3, 529 (1972). [4] Они же, Сибирск. матем. журн., 14, № 1, 86 (1973). [5] E. De Giorgi, Mem. Acad. Sci. Torino, 3, № 1, 25 (1957). [6] C. Pucci, Matematiche, 18, № 2, 102 (1963). [7] C. Pucci, Ann. math. pura ed appl., 65, № 4, 311 (1964). [8] I. R. Cannon, Ann. Scuola norm. superiori Pisa, Sci. fis. e mat., 19, № 3, 415 (1965). [9] Л. И. Камынин, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 7, № 3, 551 (1967). [10] А. Фридман, Уравнения с частными производными параболического типа, М., 1968.