Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 3

УДК 519.211

МАТЕМАТИКА

Л. А. ЛЕВИН

О ПОНЯТИИ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 III 1973)

В работе (1) А. Н. Колмогоров предложил определение случайного объекта. Необходимость введения такого понятия связана с рядом трудностей в обосновании теории вероятностей как естественнонаучной теории. В указанной работе была введена величина $k(x)$ — алгоритмическая сложность объекта, x, и случайными считались те объекты, у которых $k(x)$ мало отличалась от логарифма вероятности x. (Их разность называлась дефектом случайности.)

Однако этот подход в своем первоначальном виде годился лишь для конечного числа равновероятных объектов. Переход к неравновероятному случаю (который всегда неизбежен уже при рассмотрении случайной величины с произвольным целым значением или счетной последовательности случайных величин) приводил к затруднениям. Для преодоления этих трудностей П. Мартин-Лёф отказался от введения инвариантной (не зависящей от распределения вероятностей) величины типа $k(x)$ и ввел для каждого вычислимого распределения отдельный критерий (тест) случайности (см. (2)). Однако определенный Мартин-Лёфом дефект случайности не выражался естественным образом через распределение вероятности и какую-нибудь инвариантную величину. В этом отношении первоначальное определение А. Н. Колмогорова обладает преимуществом, которое было бы жалко потерять. Мы, в частности, покажем, как можно усовершенствовать это определение, чтобы оно годилось для самого общего случая.

Из уже известных результатов на эту тему следует упомянуть о результате Шнорра (см. (4)), который дает критерий слабой случайности в терминах обычной колмогоровской сложности, и о результатах П. Гача (6).

Будем рассматривать последовательности натуральных чисел, конечные (кортежи) и бесконечные. Последовательность, в которой встречаются только числа 0 и 1, будем называть д в о и ч н о й. Две последовательности x и y, из которых одна является началом другой ($x\subset y$ или $y\subset x$), будем называть с о г л а с о в а н н ы м и. Напомним, что в ы ч и с л и м ы м о п е р а т о р о м называется перечислимое множество A пар кортежей (x, y) такое, что если $(x, y)\in A$ и $(x', y')\in A$ и x согласовано с x', то y согласовано с y' (см. (1)).

Пусть α — конечная или бесконечная последовательность. Тогда все кортежи y такие, что при некотором $x\subset\alpha$ пары $(x, y)\in A$ являются началами некоторой последовательности β (конечной или бесконечной), которая называется о б р а з о м п о с л е д о в а т е л ь н о с т и α $(\beta = A(\alpha))$ *.

О п р е д е л е н и е. М о н о т о н н о й с л о ж н о с т ь ю к о р т е ж а y по оператору A $(km_A(y))$ называется минимальная длина двоичного кортежа x такого, что $A(x)\supset y$.

Т е о р е м а 1. *Среди всех вычислимых операторов существует «оптимальный», сложность по которому минимальна с точностью до аддитивной константы. Эту сложность мы будем обозначать* $km(x)$.

---

* В этой форме определение вычислимого оператора встречается у Ю. Т. Медведева.

Пусть P — произвольное вычислимое распределение вероятностей на множестве последовательностей натуральных чисел ($P(x)$ — вероятность того, что последовательность начинается на кортеж x).

Теорема 2. а) *Для любой последовательности* α *

$$km(\alpha_n) \preccurlyeq |\log_2 P(\alpha_n)|.$$

б) *Для P-почти любой* α

$$km(\alpha_n) \asymp |\log_2 P(\alpha_n)|,$$

причем вероятность того, что $|\log_2 P(\alpha_n)| - km(\alpha_n)$ *будет больше, чем* m, *не превосходит* 2^{-m}.

в) *Те* α, *для которых* $km(\alpha_n) \asymp |\log_2 P(\alpha_n)|$ *удовлетворяют всем «эффективным» законам теории вероятностей (т. е. выдерживают любой тест в смысле Мартин-Лёфа) и только они.*

Таким образом, в общем случае колмогоровский подход будет коррективным, если заменить $k(x)$ на $km(x)$.

В работе [3] Левин ввел универсальную полувычислимую меру $R(x)$, которую мы также будем называть априорной вероятностью последовательности x. Модуль ее двоичного логарифма мы будем обозначать $kM(x)$.

Между $km(x)$ и $kM(x)$ существует глубокая связь. В частности, до сих пор неизвестно, совпадают ли эти величины (известно только асимптотическое их совпадение).

Легко, впрочем, доказать, что $km(x) \succcurlyeq kM(x)$. Как бы там ни было, можно показать, что $kM(x)$ также удовлетворяет всем пунктам теоремы 2, причем является минимальной полувычислимой функцией, удовлетворяющей пункту б) этой теоремы. Экспонируя пункт в), получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Последовательность* α *тогда и только тогда случайна по распределению* P *в смысле Мартин-Лёфа, когда отношение правдоподобия* $P(\alpha_n)/R(\alpha_n)$ *ограничено снизу.*

Эта теорема дает наглядное определение случайности: последовательность случайна по распределению P, когда ее вероятность по этому распределению не слишком мала (по сравнению с априорной, т. е., что $P(\alpha_n) / R(\alpha_n)$ ограничено).

Если кортеж x не является m-случайным по распределению P, то этот факт легко установить эффективно, однако обратный факт эффективно установить, вообще говоря, нельзя. (Здесь ситуация такая же, как с возможностью установить применимость алгоритма.) Интересно рассмотреть более слабые определения случайности, но с лучшими алгоритмическими свойствами.

В заключение рассмотрим понятие последовательности, случайной относительно класса распределений. Мартин-Лёф ввел понятие «бернуллиевской последовательности». Условимся обозначать B_p бернуллиевскую меру на двоичных последовательностях с вероятностью выпадения единицы p (различные испытания независимы). Мартин-Лёф построил вычислимый тест, корректный относительно всех мер B_p. (Напомним, что тестом Мартин-Лёф назвал множество пар (x, n), где x — кортеж, а n — число, означающее оценку снизу «дефекта случайности». Последовательность выдерживает тест, если все числа встречающиеся в паре с ее начальными фрагментами, ограничены (сверху). Тест вычислим, если его множество пар перечислимо. Тест корректен относительно меры P, если множество последовательностей, у которых тест находит дефектом случайности $\geqslant m$, имеет P-меру$\leqslant 2^{-m}$.) Он показал, что если последовательность выдерживает этот тест, то она является коллективом Мизеса относительно какого-нибудь p. Этот результат можно усилить, показав,

---

* (α_n) — кортеж из первых n чисел α, знак $\preccurlyeq$ означает меньше или равно с точностью до аддитивной константы, знак $\asymp$ — равно с той же точностью.

что последовательность тогда и только тогда выдерживает бернуллиевский тест Мартин-Лёфа, когда существует p, при котором последовательность выдерживает любой тест, корректный относительно меры B_p, вычислимый относительно p. Более того, этот более сильный результат можно доказать в очень общем случае. Цилиндрическим множеством будем называть множество мер P, удовлетворяющих условию вида

$$t_1 < P(x_1) < t_1', \ldots, t_n < P(x_n) < t_n',$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — конечный набор кортежей. Объединение перечислимой совокупности цилиндрических множеств назовем конструктивно открытым, дополнение конструктивно открытых — конструктивно замкнуто. (Все это стандартные понятия конструктивной топологии.)

Теорема 4. *Пусть M — конструктивно замкнутый класс мер.*

Тогда существует вычислимый тест T, корректный относительно всех мер из M, такой, что для всякой выдерживающей его последовательности существует мера $P \in M$ такая, что эта последовательность выдерживает любой тест, корректный относительно p и вычислимый относительно нее же.

Заметим, что классы мер, не являющиеся замкнутыми, можно не рассматривать, так как для всякого вычислимого теста класс мер, относительно которых он корректен, будет конструктивно замкнут.

Последняя теорема важна, когда задан тип случайного процесса (например, марковский), но не заданы его параметры и нас интересует случайность при каких-нибудь параметрах.

Результаты настоящей статьи докладывались на симпозиуме по алгебраическим сложностям (Ереван, май 1971 г.) и Всесоюзном симпозиуме — школе по основаниям математики (Обнинск, июнь 1971 г.). Автор благодарен всем участникам этих симпозиумов, принявшим участие в обсуждении.

Автор выражает особую благодарность акад. А. Н. Колмогорову, а также М. И. Кановичу и Н. В. Петри за ценное обсуждение.

Институт проблем передачи информации
Академии наук СССР
Москва

Поступило
1 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Три подхода к определению понятия количества информации. Проблемы передачи информации, 1, 1, 1965, стр. 3. [2] P. Martin-Lof, Information and Control, 9, 602 (1966). [3] А. К. Звонкин, Л. А. Левин, УМН, в. 6 (1970). [4] P. K. Schnorr, Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit, 1970. [5] Л. А. Левин, Некоторые теоремы об алгоритмическом подходе к теории вероятностей и теории информации, Кандидатская диссертация, М., 1971. [6] П. Гач, О сложности случайных последовательностей, Будапешт, 1971, препринт.