Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 4

УДК 519.5 **МАТЕМАТИКА**

В. Г. КАНОВЕЙ

О СТЕПЕНЯХ КОНСТРУКТИВНОСТИ И ДЕСКРИПТИВНЫХ СВОЙСТВАХ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В ИСХОДНОЙ МОДЕЛИ И В ЕЕ РАСШИРЕНИЯХ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 4 XII 1973)

1. Обозначения. Пусть $\mathfrak{M}$ — счетная стандартная транзитивная модель ZFC (C — аксиома выбора, в дальнейшем рассматриваются только такие модели) и $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ — такая же модель.

Пусть $x \in \mathfrak{N}$, $y \in \mathfrak{N}$ — произвольные подмножества $\mathfrak{M}$. Будем писать $x \leqslant_{\mathfrak{M}} y$, если $x \in \mathfrak{M}(y)$ (где $\mathfrak{M}(y)$ — конструктивное замыкание множества $\mathfrak{M} \cup \{y\}$ по ординалам из $\mathfrak{M}$, подробно см. [5]); и $x \approx_{\mathfrak{M}} y$, если $x \leqslant_{\mathfrak{M}} y$ и $y \leqslant_{\mathfrak{M}} x$. Очевидно, $\approx_{\mathfrak{M}}$ — отношение эквивалентности, а $\leqslant_{\mathfrak{M}}$ — частичный порядок на классах эквивалентности. Следуя [2], классы эквивалентности относительно $\approx_{\mathfrak{M}}$ будем называть степенями $\mathfrak{M}$-конструктивности. Частично упорядоченное множество (или класс) всех степеней $\mathfrak{M}$-конструктивности подмножеств ординального ряда $\mathfrak{M}$ будем обозначать $\mathrm{Const}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{N})$.

Пусть $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(a)$, где $a \subseteq \omega_0$. Если a является генерическим в смысле [3], будем писать $a \in G(\mathfrak{M})$, если случайное в смысле [3], то $a \in R(\mathfrak{M})$, а если a — генерическое в смысле [2] (полученное вынуждением с помощью совершенных множеств), то $a \in S(\mathfrak{M})$.

2. В работе [2] Сакс ставит вопрос о возможных структурах $\mathrm{Const}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{N})$.

Если P, Q — частично упорядоченные множества, $P \subseteq Q$, $\forall x \forall y [x \in P \& y \in P \to [x \leqslant_P y \equiv x \leqslant_Q y]]$ и $\forall x \forall y [x \in P \& y \in Q \& y \leqslant_Q x \to y \in P]$, будем называть P **начальным сегментом** Q. Подобие ($\simeq$) частично упорядоченных множеств будем понимать в смысле порядкового изоморфизма.

Для единства терминологии будем считать ω_0 недостижимым кардиналом.

Если P — частично упорядоченное множество, то символом $J(P)$ будем обозначать совокупность всех начальных сегментов в P, упорядоченную по включению.

Если $\varkappa$ — кардинал, то пусть $T'(\varkappa) = \{J(P) \mid \mathrm{card}(P) \leqslant \varkappa \& \forall X [X \subseteq P \& X$ — антицепь $\& \exists x \forall y\ [x \in P \& [y \in X \to y \leqslant x]] \to \mathrm{card}(X) < \varkappa]\}$; $T^2(\varkappa) = \{J(P) \mid \forall X [X \subseteq P \to X$ имеет минимальный элемент$]$ $\& \mathrm{card}(P) \leqslant \varkappa\}$; $T^3(\varkappa) = \{J(P) \mid \forall X\ [X$ — антицепь $\& X \subseteq P \to \mathrm{card}(X) < \varkappa]\}$; $T^{12}(\varkappa) = T^1(\varkappa) \cap T^2(\varkappa)$ и т. д. ($X \subseteq P$ называется **антицепью**, если $\forall x \forall y\ [x, y \in X \to \sim x \leqslant y]$).

Теорема 1. *Пусть $\varkappa$ — недостижимый кардинал в $\mathfrak{M}$, $J \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \vDash$ «$J \in T^{23}(\varkappa)$».*

Тогда найдется расширение $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ такое, что $\mathrm{Const}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{N}) \simeq J$.

Теорема 2. *Если $\varkappa$ — недостижимый кардинал в $\mathfrak{M}$, то найдется такое расширение $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$, что $\varkappa$ останется недостижимым кардиналом в $\mathfrak{N}$, $\mathrm{Const}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{N}) \in \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N} \vDash$ «Если $J \in T^{12}(\varkappa)$, то $\exists Q [Q \simeq J \& Q$ — начальный сегмент $\mathrm{Const}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{N})$».*

Теорема 3. *Существует расширение $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ такое, что $J = \mathrm{Const}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{N})$ принадлежит $\mathfrak{N}$, несчетно в $\mathfrak{N}$, но если $a \in \mathfrak{N}$, $a \subseteq \omega_0$ и $X \in \mathfrak{M}(a)$, $\mathfrak{M}(a) \vDash$«X — начальный сегмент J», то X счетно в $\mathfrak{M}(a)$.*

Теорема 1 позволяет строить модели с фиксированным $\mathrm{Const}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{N})$, теорема 2 — с «предельно богатым» $\mathrm{Const}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{N})$, теорема 3 дает пример модели, структура $\mathrm{Const}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{N})$ которой не может быть выяснена ни в какой ее подмодели вида $\mathfrak{M}(a)$, $a \subseteq \omega_0$.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{M}$ — модель, L — совокупность конструктивных элементов $\mathfrak{M}$, $\varkappa \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models$ «$\varkappa$ — рамсеевский кардинал» (см ([4])).*

Тогда $\mathfrak{M} \models$ «$\forall P \forall \theta [\theta \in \varkappa \& \theta = \mathrm{card}\,(\theta) \& P \subseteq \theta \& J(P) \in T^{12}(\theta) \to \exists Q [Q \simeq$ $\simeq J(P) \& Q$ *— начальный сегмент* $\mathrm{Const}_{L(P)}(\mathfrak{M})]]$».

3. Известно (см. ([2])), что если $a \in S(\mathfrak{M})$ и $b \in \mathfrak{M}(a)$, $b \subseteq \omega_0$, то либо $b \in \mathfrak{M}$, либо $b \in S(\mathfrak{M})$ и $b \approx_{\mathfrak{M}} a$. В той же работе ([2]) упомянуто, что если $a \in G(\mathfrak{M})$, $b \in \mathfrak{M}(a)$, $b \subseteq \omega_0$, $b \notin \mathfrak{M}$, то не обязательно $b \in G(\mathfrak{M})$, но тем не менее существует такое $c \in G(\mathfrak{M})$, $c \in \mathfrak{M}(a)$, что $b \approx_{\mathfrak{M}} c$.

Теорема 5. *Если $a \in R(\mathfrak{M})$, то $\mathrm{Const}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{M}(a))$ содержит ω_1 элементов и всякий элемент $\mathrm{Const}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{M}(a))$ содержит некоторое $b \in R(\mathfrak{M})$.*

Теорема 6. *Если $a \in G(\mathfrak{M}) \cup R(\mathfrak{M}) \cup S(\mathfrak{M})$, а $b \in G(\mathfrak{M}(a)) \cup R(\mathfrak{M}(a))$, то $a \notin \mathfrak{M}(b)$. Но если $b \in S(\mathfrak{M}(a))$, то $a \in \mathfrak{M}(b)$. Более того, если $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ и всякий элемент $\mathrm{Const}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{N})$ содержит некоторое $c \in G(\mathfrak{M}) \cup R(\mathfrak{M})$ и $a \in S(\mathfrak{N})$, то действительные числа $\mathfrak{M}(a)$ и $\mathfrak{N}(a)$ совпадают. В частности, если $\mathfrak{M} \models$ «$\exp(\omega_0) = \omega_1$», $\mathfrak{N} \models$ «$\exp(\omega_0) = \omega_2$» и $a \in S(\mathfrak{N})$, то $\mathfrak{N}(a) \models$ «$\exp(\omega_0) = \omega_1$», т. е. $a \subseteq \omega_0$ может «склеивать» кардиналы от ω_1 до $\exp(\omega_0)$ включительно.*

Теорема 7. *Пусть θ — первый несчетный ординал $\mathfrak{M}$.*

Тогда найдется такое f, что $\mathfrak{M}(f)$ — модель, $\mathfrak{M}(f) \models$ «f — биекция ω_0 на $\theta \& \forall g$ [g — биекция ω_0 на $\theta \to f \approx_{\mathfrak{M}} g$]».

Иными словами, в $\mathfrak{M}(f)$ есть всего одна степень $\mathfrak{M}$-конструктивности функций из ω_0 на θ (очевидно, что для функций f типа построенных в ([1]) это не так).

4. Пусть $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ — модели. Пусть R — совокупность всех действительных чисел $\mathfrak{N}$, а $X = R \cap \mathfrak{M}$.

Если $A \subseteq R$, то будем писать $M(A)$, если A измеримо; $B(A)$, если A обладает свойством Бэра; $P(A)$, если A содержит совершенное подмножество.

Теорема 8. *Если $a \in G(\mathfrak{M})$, то*

$$\mathfrak{M}(a) \models «M(X) \& \sim B(X) \& \sim P(X) \& P(R - X)»;$$

если $a \in R(\mathfrak{M})$, то

$$\mathfrak{M}(a) \models «\sim M(X) \& B(X) \& \sim P(X) \& P(R - X)»;$$

если $a \in S(\mathfrak{M})$, то

$$\mathfrak{M}(a) \models «\sim M(X) \& \sim B(X) \& \sim P(X) \& P(R - X)».$$

Теорема 9. *Если $\mathfrak{M}$ — модель, то существует ее расширение $\mathfrak{N}$ такое, что $\mathfrak{N} \models$ «$\sim M(X) \& \sim B(X) \& \mathrm{card}\,(X) < \mathrm{card}\,(R)$».*

Автор глубоко признателен проф. В. А. Успенскому и В. Н. Гришину за помощь.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *П. Дж. Коэн*, Теория множеств и континуум-гипотеза, М., 1969. [2] *G. E. Sacks*, Proc. Symp. Pure Math., v. 13, № 1 (1967). [3] *R. M. Solovay*, Ann. Math., v. 1, № 1, 1 (1970). [4] *H. J. Keisler, A. Tarski*, Fund. Math., v. 53, 225 (1964). [5] *R. B. Jensen*, Lectures Notes in Mathematics, № 37 (1968).