Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 5

УДК 517.54 *МАТЕМАТИКА*

Ю. Е. АЛЕНИЦЫН

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ПЛОЩАДЕЙ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С КВАЗИКОНФОРМНЫМ ПРОДОЛЖЕНИЕМ

(*Представлено академиком В. И. Смирновым 13 VIII 1973*)

В статье рассматриваются однолистные и p-листные конформные отображения области соответственно с однолистным и p-листным квазиконформным продолжением в ее внешность. Для таких отображений устанавливаются теоремы, усиливающие некоторые известные теоремы площадей для конформных отображений области. В связи с этим находится соответствующая форма некоторых теорем площадей для функций, регулярных в области с бесконечно удаленной внутренней точкой, за исключением полюса в этой точке, ранее полученных для функций, мероморфных в конечной области [1].

Пусть B — конечносвязная область плоскости z, содержащая бесконечно удаленную точку, с границей, состоящей из простых замкнутых аналитических кривых; $P(z)=\alpha_p z^p+\ldots+\alpha_1 z$, $\alpha_p\neq 0$,— любой заданный полином; $j_P^{(\theta)}(z)$, $\theta\in[0,\pi]$,— та единственно определенная функция, регулярная в области B, за исключением полюса в $z=\infty$, главная часть которой в $z=\infty$ (с причислением к ней и свободного члена) совпадает с $P(z)$ и которая ставит в соответствие каждой граничной компоненте области B отрезок прямой наклона θ к вещественной оси [2];

$$M_P(z)={}^1/_2[j_P^{(0)}(z)-j_P^{(\pi/2)}(z)],\qquad N_P(z)={}^1/_2[j_P^{(0)}(z)+j_P^{(\pi/2)}(z)];\tag{1}$$

в случае $P(z)=z$ индекс P у этих функций опускаем.

Пусть в окрестности $z=\infty$

$$M_{z^m}(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{S_{m\nu}}{z^\nu}.\tag{2}$$

Величина $S=2S_{11}$ называется **размахом** области B; она играет существенную роль в некоторых проблемах конформных отображений [3].

Пусть, далее, $A(g)$ — площадь (конечная или бесконечная) римановой поверхности, на которую область B отображается регулярной в ней функцией $w=g(z)$; $\bar A(f)$ — внешняя площадь функции $f(z)$ в области B, где $f(z)$ — любая функция вида

$$f(z)=P(z)+g(z)\tag{3}$$

с регулярной в области B функцией $g(z)$ [4].

Имеет место равенство [1]

$$A(f-N_P)=\bar A(N_P)-\bar A(f).\tag{4}$$

Из этого равенства, в частности, следует: в классе всех функций вида (3) верна точная оценка

$$\bar A(f)\leqslant\pi\sum_{m,\nu=1}^{p}\nu\alpha_\nu\bar\alpha_m S_{m\nu}$$

и знак равенства в ней достигается только для функций $f(z)=N_P(z)+$ $+\text{const}$. Для $P(z)=z$ этот результат известен [3]:

$$\bar{A}(f)\leqslant {}^1/_2\pi S.$$

Пусть $\{\varphi_\nu(z)\}$, $\nu=1, 2, \ldots,$ — любая ортонормированная в области B система функций, регулярных и на ее границе, полная в классе всех функций, регулярных в этой области, с интегрируемым квадратом модуля и с однозначными первообразными в ней.

Предположим, что функция $f(z)$ вида (3) слабо p-листна в среднем в области B в смысле определения, данного в [1]. Тогда имеем разложение

$$f'(z)-N_P'(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\varphi_\nu(z), \quad z\in B,$$

где c_ν — коэффициенты Фурье разности $f'-N_P'$ в системе $\{\varphi_\nu(z)\}$. Полагая

$$\psi_\nu'(z)=\varphi_\nu(z), \quad \psi_\nu(\infty)=0, \quad \nu=1, 2, \ldots, \tag{5}$$

получаем разложение

$$f(z)=N_P(z)+c_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\psi_\nu(z), \quad z\in B. \tag{6}$$

Из равенства (4) следует

Теорема 1. *Пусть функция $f(z)$ вида* (3) *слабо p-листна в среднем в область B и $N_P(z)$, $S_{m\nu}$, $\psi_\nu(z)$ определены формулами* (1), (2) *и* (5).

Тогда коэффициенты разложения (6) *удовлетворяют неравенству*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|^2\leqslant\pi\sum_{m,\nu=1}^{p}\nu\alpha_\nu\bar{\alpha}_m S_{m\nu},$$

в котором знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда внешняя площадь функции $f(z)$ в области B равна нулю.

Следствие. *Пусть функция вида $f(z)=z+g(z)$, где $g(z)$ — регулярная функция в области B, слабо однолистна в среднем в этой области и S — размах области B.*

Тогда для коэффициентов разложения (6)

$$f(z)=N(z)+c_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\psi_\nu(z), \quad z\in B,$$

имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|^2\leqslant {}^1/_2\pi S \tag{7}$$

со знаком равенства тогда и только тогда, когда внешняя площадь функции $f(z)$ в области B равна нулю.

При дополнительных предположениях относительно области B и функции $f(z)$, путем использования недавних результатов Кюнау [5] и Лехто [6] для квазиконформных отображений, далее устанавливаются некоторые новые теоремы площадей и, в частности, усиливаются неравенство (7) и неравенство теоремы площадей Г. М. Голузина [7] для функций, p-листных в $|z|>1$.

Конечносвязная область B плоскости z, содержащая бесконечно удаленную точку, называется областью Грунского, если в ней $N(z)=z$ [5]. Известно, что граничные компоненты области Грунского являются замкнутыми аналитическими выпуклыми кривыми.

Т е о р е м а 2. *Пусть B — область Грунского плоскости z, C_ν, $\nu=1,\ldots$ $\ldots, n$ — ее граничные кривые, D_ν — область, ограниченная кривой C_ν.*

Тогда для тех непрерывных однолистных отображений $w=f(z)$ полной плоскости z на полную плоскость w, которые в области B конформны и нормированы условиями $f(\infty)=\infty$, $f'(\infty)=1$, а в областях D_ν, $\nu=1,\ldots,n$, K-квазиконформны, выполняется неравенство

$$(1-k^2)A(f-z)\leqslant k^2\bar{A}(f), \tag{8}$$

где $k=(K-1)/(K+1)$, $A(f-z)$ — площадь римановой поверхности, на которую функция $w=f(z)-z$ отображает область B, $\bar{A}(f)$ — внешняя площадь функции $f(z)$ в этой области. Знак равенства в (8) *может иметь место только для отображений, аффинных в каждой из областей D_ν с модулем комплексного отклонения, равным k; для отображений с комплексным отклонением, постоянным во всем дополнении к $\bar{B}$, он реализуется только функциями*

$$f_\varepsilon(z)=\begin{cases} z+c_0+k\varepsilon\cdot M(z), & z\in\bar{B},\\ z+c_0+k\varepsilon(\bar{z}-\xi_\nu+i\eta_\nu), & z\in D_\nu,\quad \nu=1,\ldots,n,\end{cases}$$

где $|\varepsilon|=1$, $\xi_\nu=\operatorname{Re}\{j^{(\pi/2)}(z)\}$ и $\eta_\nu=\operatorname{Im}\{j^{(0)}(z)\}$ для $z\in C_\nu$, c_0 — любая постоянная.

Т е о р е м а 3. *При условиях теоремы 2 имеем точную оценку:*

$$\bar{A}(f)\geqslant(1-k^2)\cdot{}^1/_2\pi S,$$

где S — размах области B. Относительно знака равенства в этом неравенстве справедливо утверждение теоремы 2.

Для области $|z|>1$ эта теорема дает соответствующий результат Кюнау ([8]).

Т е о р е м а 4. *При условиях теоремы 2 для коэффициентов разложения* (6):

$$f(z)=z+c_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\psi_\nu(z),\quad z\in B,$$

имеем точную оценку

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|^2\leqslant k^2\cdot{}^1/_2\pi S.$$

Относительно знака равенства в этом неравенстве справедливо утверждение теоремы 2.

Для области $|z|>1$ эта теорема дает соответствующий результат Кюнау ([8]) и Лехто ([6]) — усиление теоремы площадей для функций, однолистных в области $|z|>1$ с квазиконформным продолжением в круг $|z|<1$.

Далее рассматриваются многолистные квазиконформные отображения, осуществляемые так называемыми к в а з и к о н ф о р м н ы м и ф у н к ц и я м и ([9]).

Т е о р е м а 5. *Пусть $P(z)=\alpha_pz^p+\ldots+\alpha_1z$, $\alpha_p\neq0$, — любой заданный полином.*

Тогда для тех функций $w=f(z)$, которые осуществляют непрерывное отображение полной плоскости z на полную p-листную плоскость w и которые в области $|z|>1$ имеют вид $f(z)=P(z)+g(z)$ с регулярной в этой области функцией $g(z)$, а в круге $|z|<1$ K-квазиконформны, выполняется неравенство

$$(1-k^2)A(f-P)\leqslant k^2\bar{A}(f), \tag{9}$$

где $k=(K-1)/(K+1)$, $A(f-P)$ — площадь римановой поверхности, на которую функция $w=f(z)-P(z)$ отображает область $|z|>1$, $\bar{A}(f)$ — внешняя площадь функции $f(z)$ в этой области. Знак равенства в (9) *реализуется* *только функциями*

$$f_\varepsilon(z)=\begin{cases}P(z)+c_0+k\varepsilon\overline{P(1/\bar{z})}, & |z|\geqslant 1,\\ P(z)+c_0+k\varepsilon\overline{P(z)}, & |z|<1,\end{cases}\tag{10}$$

где $|\varepsilon|=1$, c_0 — *любая постоянная.*

Утверждение этой теоремы, не касающееся вопроса о знаке равенства в (9), верно и при замене в нем области $|z|>1$ и круга $|z|<1$ соответственно на любую область B и ее внешность.

Т е о р е м а 6. *При условиях теоремы* 5 *имеет точную оценку*

$$\bar{A}(f)\geqslant(1-k^2)\pi\sum_{m=1}^{p}m|\alpha_m|^2$$

со знаком равенства только для функции (10).

Т е о р е м а 7. *При условиях теоремы* 5 *для коэффициентов* a_ν *разложения*

$$f(z)=\sum_{m=1}^{p}\alpha_m z^m+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{z^\nu},\qquad |z|>1,$$

имеем точную оценку

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu|a_\nu|^2\leqslant k^2\sum_{m=1}^{p}m|\alpha_m|^2$$

со знаком равенства только для функции (10).

Эта теорема дает для функций, p-листных в области $|z|>1$ с p-листным квазиконформным продолжением в круг $|z|<1$ усиление неравенства теоремы площадей Г. М. Голузина для функций, p-листных в $|z|>1$. Для $P(z)=z$ вновь получаем упомянутый выше результат Кюнау ([8]) и Лехто ([6]) для однолистных в $|z|>1$ функций с квазиконформным продолжением в круг $|z|<1$.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
2 VIII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ю. Е. Аленицын*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 37, 1132 (1973). [2] *H. Grunsky*, Math. Zs., B. 45, H. 1, 29 (1939). [3] *M. Schiffer*, Duke Math. J., v. 10, 209 (1943). [4] *Ю. Е. Аленицын*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 28, 607 (1964). [5] *R. Kühnau*, Math. Nachr., B. 40, H. 1—3, 1 (1969). [6] *O. Lehto*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A 1, b. 500, 3 (1971). [7] *Г. М. Голузин*, Матем. сборн. т. 8 (50), 2, 277 (1940. [8] *R. Kühnau*, Math. Nachr., B. 48, H. 1—6, 77 (1971). [9] *O. Lehto, K. J. Virtanen*, Quasikonforme Abbildungen, Berlin — Heidelberg — N. Y., 1965.