Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 4

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

Л. А. КОТКО

О НЕКОТОРЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ В ПЕРЕМЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 20 XII 1973)

В ограниченной области Ω пространства $[0, T]\times R_n$ $(n+1)$-измерений с точками (t, x) ищется решение уравнения

$$Lu=0, \tag{1}$$

удовлетворяющее на границе Ω условиям

$$\begin{gathered} D_tC_ju=B_ju, \quad 0<t\leqslant T, \quad 1\leqslant j\leqslant l, \\ Q_ju=0, \quad l+1\leqslant j\leqslant m, \end{gathered} \tag{2}$$

и начальному условию $u(0, x)=u_0(x)$, где $Lu_0=0, Q_ju_0|_{\partial\Omega}=0$.

Области, получаемые при проектировании в R_n сечений области Ω при $t=\text{const}$, обозначим через G_t, а их границы через S_t. Предполагаем, что области G_t образуют в R_n гладкое семейство областей в смысле ([1]). Выражение $L=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha(x)D_x^\alpha$ порядка $2m$, по предположению, правильно эллиптично и коэффициенты его достаточно гладки в некоторой области G, содержащей все области $\overline{G}_t (0\leqslant t\leqslant T)$. Система $\{B_j, C_j, Q_j\}$ дифференциальных выражений в G с достаточно гладкими коэффициентами имеет вид

$$B_j=\sum_{|\beta|\leqslant m_{B_j}} b_\beta^j(x)D_x^\beta, \quad C_j=\sum_{|\gamma|\leqslant m_{C_j}} c_\gamma^j(x)D_x^\gamma, \quad j=1,\ldots, l,$$

$$Q_j=\sum_{|\nu|\leqslant m_{Q_j}} q_\nu^j(x)D_x^\nu, \quad j=l+1,\ldots, m.$$

Порядки граничных операторов $m_{B_j}, m_{C_j}, m_{Q_j}$ не превосходят $2m-1$.

На S_0 задана (локальная) система координат $s=(s_1, \ldots, s_{n-1})$ такая, что уравнение любой поверхности $S_t(0\leqslant t\leqslant T)$ имеет вид $n=\varkappa(s, t)$, где n — координата точки по оси внутренней нормали, проведенной в каждой точке поверхности S_0, а $\varkappa(s, t)$ — однозначная гладкая функция.

Оператор D_t не совпадает с частной производной по t, вообще говоря, не определенной в точках границы Ω. На гладких функциях $f(t, x)$, $(t, x)\in\overline{\Omega}$, задаем его формулой

$$D_tf(t, x)|_{x=(s,\varkappa(s,t))}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t, (s, \varkappa(s, t+\Delta t)))-f(t, (s, \varkappa(s, t)))}{\Delta t}.$$

Вводится семейство операторов переноса $\Phi(t, t_1)$, связанное с семейством поверхностей S_t. $[\Phi(t, t_1)f](s, \varkappa(s, t_1))=f(s, \varkappa(s, t))$. Эти операторы при достаточной гладкости $\varkappa(s, t)$ являются равномерно ограниченными операторами из $H^p(S_t)$ в $H^p(S_{t_1})$. Операторы $\Phi(t, t_1)$ обладают свойствами: $\Phi(t, t)=I$, $\Phi(t_2, t_1)\cdot\Phi(t, t_2)=\Phi(t, t_1)$, $\Phi(t_1, t)=[\Phi(t, t_1)]^{-1}$.

Предполагаем, что система граничных операторов $\{C_j|_{j=1}^{l}, Q_j|_{j=l+1}^{m}\}$ нормальна, накрывает L в каждой точке границы S_t области G_t и что задача

$$
Lv=0 \text{ в } G_t,
$$
$$
\left.\begin{aligned} C_j v&=\varphi_j, & 1\leqslant j\leqslant l\\ Q_j v&=0, & l+1\leqslant j\leqslant m \end{aligned}\right\} \text{ на } S_t \tag{3}
$$

однозначно разрешима при любых $\{\varphi_j\}\in\oplus H^{2m-m_{C_j}-1/2}(S_t)$ и $t\in[0, T]$. Обозначим через $A(t)$ оператор, ставящий в соответствие системе функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^{l}$ систему функций $\{B_j v|_{S_t}\}_{j=1}^{l}$, вычисленных для решения v задачи (3). В силу неравенств коэрцитивности этот оператор ограниченно действует из пространства $\oplus H^{r-m_{C_j}-1/2}(S_t)$ в пространство $\oplus H^{r-m_{B_j}-1/2}(S_t)$ при $r\geqslant 2m$. Введем еще оператор $B(t)=\Phi(t, 0)A(t)\Phi(0, t)$, действующий из пространства $\oplus H^{r-m_{C_j}-1/2}(S_0)$ в пространство $\oplus H^{r-m_{B_j}-1/2}(S_0)$. Задача (1), (2) формально сводится к задаче

$$
d\xi/dt=B(t)\xi, \quad \xi(0)=\{C_j u_0|_{S_0}\}, \tag{4}
$$

где $\xi=\{\Phi(t, 0)C_j u|_{S_t}\}$.

Для того чтобы воспользоваться теоремами существования решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, нужно исследовать свойства оператора $B(t)$.

Теорема 1. *Если $m_{C_j}\geqslant m_{B_j}$, то оператор $B(t)$ ограниченно действует в пространстве $\oplus H^{r-m_{C_j}-1/2}(S_0)$, $r\geqslant 2m$, и сильно непрерывен в нем по t. Задача* (1), (2) *равномерно корректна в нормах пространств $H^r(G_t)$.*

Предположим, что $m_{B_j}-m_{C_j}>0$ и выполнено следующее условие накрывания:

1) для любого λ из сектора $\Sigma=(\lambda\colon |\arg\lambda|\leqslant\pi/2+\theta)$, $\theta>0$, любой точки $x\in S_t$ и любой пары ненулевых векторов η, $\eta'\in R_n$ таких, что η касателен, а η' нормален к S_t в точке x, полиномы комплексного переменного τ

$$
\sum_{|\beta|=m_{B_j}} b_\beta^j(x)(\eta+\tau\eta')^\beta-\lambda\sum_{|\gamma|=m_{C_j}} c_\gamma^j(x)(\eta+\tau\eta')^\gamma, \quad j=1,\ldots, l, \tag{5}
$$
$$
\sum_{|\nu|=m_{Q_j}} q_\nu^j(x)(\eta+\tau\eta')^\nu, \quad j=l+1,\ldots, m, \tag{6}
$$

линейно независимы по модулю полинома $\prod_{i=1}^{m}(\tau-\tau_i^+(x, \eta, \eta'))$, где $\tau_i^+(x, \eta, \eta')$ — корни полинома $L_0(x, \eta+\tau\eta')$ с положительными мнимыми частями (L_0 — главная часть L).

Теорема 2. *Пусть разности $m_{B_j}-m_{C_j}\geqslant 2$ и одинаковы при всех $j=1,\ldots, l$ и пусть выполнено условие* 1). *Если оператор $B(t)$, рассматриваемый как оператор в пространстве $\oplus H^{r-m_{B_j}-1/2}(S_0)$ с областью определения $\oplus H^{r-m_{C_j}-1/2}(S_0)$, $r\geqslant 2m+2$, имеет при каждом t хотя бы одну регулярную точку, то существует такое $R\geqslant 0$, что:*

1°) *Оператор $[B(t)-RI]^{-1}$ сильно непрерывно дифференцируем.*

2°) *Выполняется неравенство*

$$
\left\|\frac{d}{dt}[B(t)-RI]^{-1}-\frac{d}{dt_1}[B(t_1)-RI]^{-1}\right\|\leqslant C|t-t_1|^\delta \quad \textit{при некотором } \delta\in(0, 1).
$$

Для резольвенты $R_{B(t)}(\lambda)$ оператора $B(t)$ справедливы оценки:

3°). $\|R_{B(t)}(\lambda)\|\leqslant M/(1+|\lambda|)$,

4°) $$\left\|\frac{\partial}{\partial t}R_{B(t)}(\lambda)\right\|\leqslant\frac{N}{|\lambda|^\rho} \quad \textit{при } \lambda\in\Sigma \textit{ и } |\lambda|\geqslant R,\ \rho\in(0, 1).$$

Условия 1°)—4°), в силу результатов Т. Като и Х. Танабе (см. [2], гл. 2, § 5), обеспечивают корректную разрешимость задачи Коши (4).

Отсюда вытекает

Следствие. *В условиях теоремы 2 задача* (1), (2) *равномерно корректна в нормах пространств* $H^r(G_t)$.

Заметим, что условие существования у оператора $B(t)$ регулярной точки выполнено, например, если задача $Lw=0$ в G_t, $B_jw=\psi_j$, $j=1, \ldots, l$, $Q_jw=0$, $j=l+1, \ldots, m$, на S_t при каждом $t\in[0, T]$ однозначно разрешима.

Мы потребовали, чтобы числа $m_{B_j}-m_{C_j}$ были одинаковыми при всех $j=1, \ldots, l$, с одной стороны, для упрощения формулировки, с другой — в связи с тем, что в этом случае условие 1) необходимо для выполнения оценки 3°) на резольвенту.

Если условие совпадения $m_{B_j}-m_{C_j}$ не выполнено, но $m_{B_j}-m_{C_j}\geqslant 2$, то, для того чтобы оператор $B(t)$ обладал свойствами 3°), 4°), требуются дополнительные алгебраические условия, налагаемые на матрицу коэффициентов при степенях τ полиномов, являющихся остатками при делении полиномов (5) и (6) на полином $\prod\limits_{i=1}^{m}(\tau-\tau_i^+(x, \eta, \eta'))$.

В случае цилиндрической области Ω все предыдущие результаты справедливы при условии, что $m_{B_j}-m_{C_j}\geqslant 1$. В этом случае оператор $B(t)$ не зависит от t. Условие $m_{B_j}-m_{C_j}\geqslant 2$ нам понадобилось лишь при получении оценок 2°) и 4°).

Оператор $B(t)$, по-видимому, не обладает хорошими свойствами, когда разности $m_{B_j}-m_{C_j}$ имеют разные знаки. В связи с этим применяется видоизменение предыдущей схемы.

Предположим, что $m_{B_j}-m_{C_j}\leqslant 0$ при $j=1,\ldots, l_1$ и $m_{B_j}-m_{C_j}\geqslant 2$ при $j=l_1+1, \ldots, l$. Условия типа 1) налагаются на систему операторов C_j, $j=1, \ldots, l_1$, $B_j-\lambda C_j$, $j=l_1+1, \ldots, l$, и Q_j, $j=l+1, \ldots, m$. Рассматриваются два оператора $B_1(t)$ и $B_2(t)$, причем $B_1(t)$ получается ограниченным, а $B_2(t)$ удовлетворяет условиям 1°)—4°). Решение исходной задачи получается путем последовательного решения ряда задач для однородных и неоднородных линейных дифференциальных уравнений с операторами $B_1(t)$ и $B_2(t)$. Эту схему удается провести в предположении, что порядки граничных операторов удовлетворяют дополнительному условию

$$\max_{l_1<j\leqslant l}(m_{B_j}-m_{C_j})-\min_{l_1<j\leqslant l}(m_{B_j}-m_{C_j})+1\leqslant\min_{1\leqslant j\leqslant l_1}(m_{C_j}-m_{B_j}).$$

Устанавливается, что задача (1), (2) корректна по Адамару в следующем смысле: если

$$u_0(x)\in H^M(G_0),$$

где

$$M=r+\max_{l_1<j\leqslant l}(m_{B_j}-m_{C_j})-\min_{l_1<j\leqslant l}(m_{B_j}-m_{C_j})+2, \quad r\geqslant r_0,$$

то справедливо неравенство

$$\|u(t, x)\|_{H^r(G_t)}\leqslant C\|u_0(x)\|_{H^M(G_0)}.$$

Заметим, что задачи, близкие к рассмотренным, встречаются при изучении движения сплошных сред со свободными поверхностями.

Краевые задачи с условиями типа (2) для конкретных уравнений второго порядка в цилиндрической области Ω изучались в работах В. В. Барковского (см. [3]).

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
26 XI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *S. G. Krein*, Studia Mathematica, v. 31, 527 (1968). [2] *С. Г. Крейн*, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., «Наука», 1967. [3] *В. В. Барковский*, Докл. УССР, сер. А, № 2 (1972).