Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 4

УДК 517.91/.943 *МАТЕМАТИКА*

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, А. В. ПОКРОВСКИЙ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С РЕЛЕЙНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 24 XII 1973)

1. Рассмотрим преобразователь W со скалярным входом u и выходом x. Через $A(u, W)$ обозначим множество возможных состояний a преобразователя W при входе u. Относительно выхода x будем считать, что он однозначно определяется входом u и состоянием a: $x=F(u, a)$. Преобразователь определяется тем, как зависит выходной сигнал $x(t)$ от переменного во времени входного сигнала $u(t)$. Для точной математической постановки задачи нужно описать допустимый класс U переменных входных сигналов $u(t)$. После этого преобразователь W становится оператором, сопоставляющим каждому входу $u(t)\in U$ и каждому начальному состоянию $a_0\in A[u(t_0), W]$ переменный выход

$$x(t)=W[t_0, a_0]u(t), \quad t\geqslant t_0. \tag{1}$$

Мы будем считать, что переменное состояние $a(t)\in A[u(t), W]$ преобразователя также однозначно определяется входом $u(t)\in U$, т. е.

$$a(t)=\Gamma[t_0, a_0; W]u(t), \quad t\geqslant t_0. \tag{2}$$

Если оператор (2) известен, то, конечно, определен и оператор (1).

Ниже рассматриваются лишь физически реализуемые [1] преобразователи, т. е. операторы (1) и (2) предполагаются вольтерровыми.

При феноменологическом описании конкретных преобразователей обычно указываются рецепты определения значений операторов (1) и (2) лишь на переменных входах специального типа (гармонических, кусочно-монотонных и некоторых других). В этих случаях распространение операторов (1) и (2) на более широкие классы входов часто требует дополнительных построений (см., например, [2]).

В качестве U приходится в зависимости от конкретных ситуаций рассматривать различные классы функций $u(t)$, $-\infty<t<\infty$. Во всех случаях будет предполагаться, что класс U обладает следующими свойствами: а) из $u(t)\in U$ вытекает принадлежность классу U любой функции $u(t+h)$; б) по любым числам $t_1<t_2$ и любым входам $u_1(t)$, $u_2(t)\in U$ можно построить такой вход $u(t)\in U$, что $u(t_1)=u_1(t_1)$ и $u(t_2)=u_2(t_2)$. Относительно преобразователя W будет предполагаться, что он стационарен, т. е.

$$\Gamma[t_0, a_0; W]u(t)=\Gamma[t_0+h, a_0; W]u(t+h),$$

и что он обладает полугрупповым свойством, выражаемым равенством

$$\Gamma[t_0, a_0; W]u(t)=\Gamma\{t_1, \Gamma[t_0, a_0; W]u(t_1); W\}u(t), \quad t_0\leqslant t_1\leqslant t. \tag{3}$$

Склейкой (точнее, t_0-склейкой) функций $u_1(t)$, $u_2(t)$, $-\infty<t<\infty$, удовлетворяющих условию $u_1(t_0)=u_2(t_0)$, называется функция $u(t)$, совпадающая с $u_1(t)$ при $t\leqslant t_0$ и с $u_2(t)$ при $t\geqslant t_0$. Класс U назовем инвариантным относительно склейки, если он вместе с любыми двумя функциями $u_1(t)$ и $u_2(t)$ содержит каждую их склейку. Класс U назовем слабо инвариантным относительно склейки, если для каждой склейки $u(t)$ двух функций класса U найдется такая строго возрастающая непрерывная функция $\varphi(t)$, $\varphi(-\infty)=-\infty$, $\varphi(\infty)=\infty$, что $u[\varphi(t)]\in U$. Инвариантными относительно склейки будут, например, класс кусочно-гладких функций, класс непрерывных функций, класс функций непрерывных справа, класс всех функций и т. д. Класс непрерывно дифференцируемых функций слабо инвариантен относительно склейки.

2. Пусть преобразователь W_0 определен на том же классе U входных функций, что и преобразователь W, и пусть $A(u, W_0)\subset A(u, W)$ при всех u. Если при каждом $a_0\in A[u(t_0), W_0]$ переменные состояния и выходы преобразователей W_0 и W определяются одинаковыми операторами (1) и (2), то назовем преобразователь W_0 сжатием преобразователя W.

Преобразователь W назовем управляемым, если каждым двум парам $\{u_1, a_1\}$ и $\{u_2, a_2\}$, где u_1 и u_2 — значения некоторых функций из U, а $a_i\in A(u_i, W)$, соответствует такой переменный вход $u(t)\in U$, что при некоторых $t_1\leqslant t_2$ выполнены равенства $u(t_1)=u_1$, $u(t_2)=u_2$ и $\Gamma[t_1, a_1; W]u(t_2)=a_2$. Если объединение всех множеств $A(u, W)$ конечно, то W называется преобразователем с конечным числом состояний.

Теорема 1. *Каждый определенный на инвариантном относительно склейки классе U переменных входов преобразователь W с конечным числом состояний имеет управляемое сжатие.*

Преобразователь W назовем безынерционным, если при любых входах $u(t)$, $v(t)\in U$, связанных равенством $v(t)=u[\varphi(t)]$, где $\varphi(t)$ непрерывна и строго возрастает, причем $\varphi(-\infty)=-\infty$ и $\varphi(\infty)=\infty$, справедливо равенство

$$\Gamma[t_0, a_0; W]v(t)=\Gamma[\varphi(t_0), a_0; W]u[\varphi(t)], \quad t\geqslant t_0.$$

Теорема 2. *Каждый определенный на слабо инвариантном относительно склейки классе U переменных входов безынерционный преобразователь W с конечным числом состояний имеет управляемое сжатие.*

В условиях теорем 1 и 2 управляемые сжатия не определяются, конечно, единственным образом. Отметим еще, что в условиях этих теорем для любой пары $\{u_0, a_0\}$, $a_0\in A(u_0, W)$, найдутся такие $u(t)\in U$ и управляемое сжатие W_0 преобразователя W, что $u(t_0)=u_0$ и $\Gamma[t_0, a_0; W]u(t_1)\in \in A[u(t_1), W_0]$ при некотором $t_1>t_0$.

3. Реле — это преобразователь с двумя состояниями 0 и 1; выход x совпадает с состоянием a. Каждое реле $R(\alpha, \beta)$, $\alpha<\beta$, с гистерезисом характеризуется порогом включения β и порогом отключения α (см., например, [3, 4]). Множество $A(u; \alpha, \beta)$ состояний реле $R(\alpha, \beta)$ состоит из одного числа 0 при $u\leqslant\alpha$, чисел 0 и 1 при $\alpha<u<\beta$, числа 1 при $u\geqslant\beta$. Расширяя обычное описание [3, 4] работы реле, можно определить преобразователь-реле на множестве U всех функций $u(t)$, сопоставляя каждому переменному входу $u(t)$ и каждому начальному состоянию $a(t_0)$ переменный выход

$$a(t)=\Gamma[t_0, a(t_0); \alpha, \beta]u(t), \quad t\geqslant t_0,$$

равенствами: $a(t)=a(t_0)$, если $\alpha<u(\tau)<\beta$ при $t_0<\tau\leqslant t$; $a(t)=1$, если найдется такое $\tau_*\in(t_0, t]$, что $u(\tau_*)\geqslant\beta$ и $u(\tau)>\alpha$ при $\tau_*<\tau\leqslant t$; $a(t)=0$ в остальных случаях. При таком определении реле является стационарным, безынерционным и управляемым преобразователем; для него справедливо полугрупповое равенство (3). Реле является управляемым преобразователем и на различных более узких классах U функций (на классе измеримых функций, на классе непрерывных функций, на классе гладких функций и т. д.). Реле преобразует каждый измеримый вход в измеримый выход, каждую непрерывную справа функцию в функцию также непрерывную справа. Особо важно для нас следующее простое свойство реле.

Теорема 3. *Преобразователь $R(\alpha, \beta)$ монотонен: если $u(t) \leqslant v(t)$ при $t \geqslant t_0$, $a_0 \in A[u(t_0), \alpha, \beta]$, $b_0 \in A[v(t_0), \alpha, \beta]$ и $a_0 \leqslant b_0$, то*

$$\Gamma[t_0, a_0; \alpha, \beta]u(t) \leqslant \Gamma[t_0, b_0; \alpha, \beta]v(t), \quad t \geqslant t_0. \tag{4}$$

4. При помощи параллельных и последовательных соединений можно из простых преобразователей конструировать более сложные блок-преобразователи. В частности, из реле, умножителей на постоянные коэффициенты и сумматора можно построить преобразователь

$$W = \mu_1 R(\alpha_1, \beta_1) + \ldots + \mu_k R(\alpha_k, \beta_k); \tag{5}$$

здесь $\mu_i \neq 0$, все реле $R(\alpha_i, \beta_i)$ различны, $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_k$; если $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, то $\beta_{i+1} > \beta_i$. Состояниями преобразователя (5) являются векторы $\{a_1, \ldots, a_k\}$, каждая компонента a_i которых — это состояние реле $R(\alpha_i, \beta_i)$. Преобразователь (5) определен на всех входах, измеримые входы он преобразует в измеримые выходы. Преобразователь (5) управляем в том и только том случае, если $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$ и $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_k$. Теоремы 1 и 2 в случае преобразователя (5) допускают усиление.

Теорема 4. *Преобразователь (5) имеет единственное управляемое сжатие W_0 на классе U непрерывных кусочно монотонных функций. Множества $A(u, W_0)$ состояний этого сжатия состоят из таких векторов $\{a_1, \ldots, a_k\}$, что $a_i \geqslant a_j$, если $\beta_i \leqslant \beta_j$, $i < j$.*

Реле $R(\alpha, \beta)$ и $R(\gamma, \delta)$ назовем несравнимыми, если $(\alpha - \gamma) \cdot (\beta - \delta) < 0$. Через $n(W)$ обозначим количество подмножеств (из двух, трех и т. д. элементов) системы реле $R(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, \ldots, k$, состоящих из попарно несравнимых элементов.

Теорема 5. *Количество состояний управляемого сжатия W_0 преобразователя (5) равно $1 + k + n(W)$.*

Удобным аппаратом для доказательства утверждений типа теорем 4 и 5 являются известные диаграммы Прейсаха ([5, 6]).

В виде (5) может быть представлен не каждый блок-преобразователь, в который входят последовательные и параллельные соединения реле. Описание управляемых сжатий таких блок-преобразователей является более сложной задачей. Для нас важна лишь одна общая характеристика таких блок-преобразователей, вытекающая из теоремы 3.

Теорема 6. *Пусть блок-преобразователь $\mathfrak{W}$ построен из конечного числа реле, умножителей на неотрицательные коэффициенты и сумматоров при помощи последовательных и параллельных соединений (но без обратных связей).*

Тогда $\mathfrak{W}$ является монотонным преобразователем.

5. Пусть динамика некоторой системы описывается уравнением

$$Lx(t) = f\{t, x(t), \mathfrak{W}[t_0, a_0]x(t)\}, \tag{6}$$

где L — линейный обыкновенный дифференциальный оператор с T-периодическими коэффициентами, функция Грина T-периодической задачи для которого неотрицательна (например, L дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, корни характеристического многочлена которого вещественные и отрицательные); $f(t, x, y)$ — скалярная функция, которая непрерывна и T-периодична по t, а по переменным x и y не убывает; $\mathfrak{W}[t_0, a_0]$ — оператор (1), построенный по преобразователю $\mathfrak{W}$, удовлетворяющему условиям теоремы 6. В изучаемую систему могут входить, конечно, и идеальные реле типа $\operatorname{sign}(x - \alpha)$. Нас будет интересовать вопрос о существовании таких начальных состояний преобразователя $\mathfrak{W}$, при которых у системы есть T-периодические при $t \geqslant t_0$ колебания.

Для специальных классов уравнений (6) существование решений заданного периода и особого вида установлено методом припасовывания и методом частотных характеристик А. И. Лурье, Я. З. Цыпкиным, П. В. Бромбергом и другими авторами (см., например, ([3, 7–9])). В общей постановке задача, насколько нам известно, не изучалась.

Теорема 6 позволяет применить для изучения уравнения (6) утверждения о неподвижных точках типа известного принципа Биркгофа (см. ([10, 11])).

Теорема 7. *Пусть при каждом y*

$$\lim_{|x|\to\infty} \max_{0\le t\le T} |x^{-1}f(t, x, y)| = 0.$$

Тогда существует начальное состояние преобразователя $\tilde{W}$, *при котором уравнение* (6) *имеет по крайней мере одно T-периодическое решение.*

Предположение о неотрицательности функции Грина оператора L в условиях теоремы 7 существенно — можно привести примеры уравнений (6) с правой частью простейшего вида $f(t)+\operatorname{sign} x$, у которых нет T-периодических решений.

Авторы благодарны В. Б. Привальскому и Я. З. Цыпкину за интересное обсуждение работы.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
6 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Основы автоматического управления, под ред. В. С. Пугачева, М., 1963. [2] *В. С. Козякин, М. А. Красносельский, А. В. Покровский*, ДАН, т. 206, № 4 (1972). [3] *Я. З. Цыпкин*, Теория релейных систем автоматического регулирования, М., 1955. [4] *Я. З. Цыпкин, Ю. С. Попков*, Теория нелинейных импульсных систем, М., 1973. [5] *S. Preisach*, Zs. Phys., B. 94, № 5, 6 (1935). [6] *А. А. Вроблевский, В. Г. Корольков и др.*, Физические основы магнитной звукозаписи, М., 1970. [7] *П. М. Бромберг*, Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М., 1967. [8] *I. Flugge-Lotz*, Discontinuous and Optimal Control, N. Y., 1968. [9] *J.-G. Paguet, J.-F. Le Maitre*, Méthodes pratiques d'etude des oscilations non linearés, Paris, 1970. [10] *Г. Биркгоф*, Теория структур, М., 1952. [11] *М. А. Красносельский, А. В. Соболев*, Сибирск. матем. журн., т. 14, № 3 (1973).