Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 4

УДК 517.537 *МАТЕМАТИКА*

И. Ю. РЫЖАКОВ

АНАЛОГ ЗАДАЧИ Е. И. ЗОЛОТАРЕВА ДЛЯ КРУГА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 18 XII 1973)

Пусть $n\geqslant 2$ — заданное натуральное число, а A и B — заданные комплексные числа. Через $\mathscr{P}_n(A, B)$ обозначим множество алгебраических полиномов

$$P_n(z)=\sum_{k=0}^{n} p_k z^k,$$

два старших коэффициента которых фиксированы: $p_n=A$, $p_{n-1}=B$. Введем также следующие обозначения:

$$\mu_n(A, B)=\inf_{P_n\in\mathscr{P}_n(A,\,B)}\ \operatorname{Sup}_{|z|\leqslant 1}|P_n(z)|,$$

$\pi_n(A, B, z)$ — полином из $\mathscr{P}_n(A, B)$ такой, что

$$\mu_n(A, B)=\operatorname{Sup}_{|z|\leqslant 1}|\pi_n(A, B, z)|.$$

Полином $\pi_n(A, B, z)$ существует и единствен для любых A и B ([1], стр. 389, 406); $\pi_n(A, 0, z)=Az^n$, $\pi_n(0, B, z)=Bz^{n-1}$ ([1], стр. 326); отметим еще, что в [1], стр. 338, указаны $\pi_2(A, B, z)$ и $\mu_2(A, B)$ для любых A и B.

Здесь мы рассмотрим задачу отыскания $\pi_n(A, B, z)$ и $\mu_n(A, B)$ для любых $n\geqslant 2$ и любых A и B, $B\neq 0$. Эту задачу ниже будем называть задачей (A, B). Так как при $B\neq 0$ $\pi_n(A, B, z)=Be^{i(n-1)\varphi}\pi_n(\lambda, 1, ze^{i\varphi})$, где $\lambda e^{i\varphi}=A/B$, то достаточно решить задачу $(\lambda, 1)$, $0\leqslant\lambda<+\infty$.

Теорема. *Пусть заданы натуральное число $n\geqslant 2$ и число $\lambda\geqslant 0$. Тогда*

$$\mu_n(\lambda, 1)=-\frac{\sin t\sin 2t\sin(n-1)t}{\cos\left(\frac{n}{2}+1\right)t\left[\sin t\cos\frac{n}{2}t+\sin(n-1)t\cos\left(\frac{n}{2}-2\right)t\right]l_{n-1}(t)}, \tag{1}$$

$$\pi_n(\lambda, 1, z)=\mu_n(\lambda, 1)\left[\sum_{k=0}^{n-1} l_k(t)z^k+\alpha(t)\prod_{k=1}^{n}(z-z_k(t))\right],$$

где $z_k(t)=e^{i(2k-n-1)t}$, $k=1, 2, \ldots, n$,

$$l_k(t)=\prod_{m=0,\,m\neq k}^{n-1}\frac{\cos(n/2-m-1)t}{\sin(k-m)t},\qquad k=0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

$$\alpha(t)=(-1)^{n+1}\frac{\cos(n/2-2)t\cos(n/2-1)t\,l_0(t)}{\sin 2t\sin(n-1)t}, \tag{3}$$

а t есть тот (единственный) корень уравнения

$$\lambda=(-1)^n\frac{\sin t\cos(n/2-2)t\cos(n/2-1)t\,l_0(t)}{\cos(n/2+1)t[\sin t\cos(n/2)t+\sin(n-1)t\cos(n/2-2)t]l_{n-1}(t)} \tag{4}$$

который лежит на промежутке $[\pi/(n+2), \pi/n]$.

Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма. *Для каждого* $t \in [\pi/(n+2), \pi/n]$ *множество* $Z_t = \{z_k(t)\}_{k=1}^{n}$ *является характеристическим множеством* (*см.* [1], *стр.* 396) *задачи* (A, B) *при некоторых* $A=A(t)$ *и* $B=B(t)$.

Доказательство леммы. Обозначим

$$R_n(z,t) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k(t)) = \sum_{k=0}^{n} r_k(t) z^k,$$

$$R_{n,k}(z,t) = \frac{R_n(z,t)}{z - z_k(t)}.$$

Вектор $\Lambda = \{R_{n,k}(z_k(t), t)\}_{k=1}^{n}$ ортогонален каждой строке матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad z_k = z_k(t).$$

Поэтому (см. [2]), если при некотором t существует полином $P_n(z, t) = \sum_{k=0}^{n} p_k(t) z^k$ такой, что

$$P_n(z_k(t), t) = \frac{R_{n,k}(z_k(t), t)}{|R_{n,k}(z_k(t), t)|}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \tag{5}$$

$$\sup_{|z| \leq 1} |P_n(z, t)| = 1, \tag{6}$$

то множество Z_t является характеристическим множеством задачи (A, B), $A = p_n(t)$, $B = p_{n-1}(t)$, а $\pi_n(p_n(t), p_{n-1}(t), z) = P_n(z, t)$.

Всякий полином степени n, удовлетворяющий условию (5), можно записать в виде $L_{n-1}(z, t) + \alpha R_n(z, t)$, где $L_{n-1}(z, t)$ — интерполяционный полином Лагранжа,

$$L_{n-1}(z,t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_{n,k}(z,t)}{|R_{n,k}(z_k(t), t)|} = \sum_{k=0}^{n-1} l_k(t) z^k, \tag{7}$$

а α — параметр. Покажем, что параметр $\alpha = \alpha(t)$ можно подобрать так, что полином

$$P_n(z, t) = L_{n-1}(z, t) + \alpha(t) R_n(z, t) \tag{8}$$

будет удовлетворять при $t \in [\pi/(n+2), \pi/n]$ и условию (6).

Введем в рассмотрение тригонометрический полином $T_n(\varphi)$,

$$T_n(\varphi) = |P_n(e^{i\varphi}, t)|^2 = \sum_{k=-n}^{n} c_k(t) e^{ik\varphi}.$$

Из (8) найдем ($l_k = l_k(t)$, $r_k = r_k(t)$)

$$\begin{aligned} c_n(t) &= \alpha(t)\,(l_0 + \alpha(t) r_0), \\ c_{n-1}(t) &= (l_{n-1} + \alpha(t) r_{n-1})\,(l_0 + \alpha(t) r_0) + \alpha(t)\,(l_1 + \alpha(t) r_1). \end{aligned} \tag{9}$$

С другой стороны, так как $T_n(\varphi) = 1 + \beta(t)\,|R_n(z, t)|^2$ ($\beta(t)$ — некоторая вещественная функция), то

$$c_n(t) = r_0 \beta(t), \quad c_{n-1}(t) = 2 r_0 r_{n-1} \beta(t). \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует

$$\alpha(t)=l_0 l_{n-1}/(l_0 r_{n-1}-l_1-l_{n-1}r_0),$$
$$\beta(t)=(-1)^n(l_0 r_{n-1}-l_1)l_0^2 l_{n-1}/(l_0 r_{n-1}-l_1-l_{n-1}r_0)^2. \tag{11}$$

Полином $P_n(z, t)$ удовлетворяет условию (6) тогда и только тогда, когда $\beta(t)\leqslant 0$. Так как

$$l_{n-1}(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|R_{n,k}(z_k(t),t)|}>0,$$

то из (11) видно, что условие $\beta(t)\leqslant 0$ эквивалентно условию $(-1)^n(l_0 r_{n-1}-l_1)\leqslant 0$. Из (7) имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} l_k(t) z_m^k(t)=\frac{R_{n,m}(z_m(t),t)}{|R_{n,m}(z_m(t),t)|}=(-e^{i(n-2)t})^{2m-n-1},\qquad m=1,2,\ldots,n.$$

Отсюда легко получим формулы (2). Так как $r_{n-1}(t)=-\dfrac{\sin nt}{\sin t}$, то теперь получим

$$(-1)^n(l_0 r_{n-1}-l_1)=\frac{\cos\dfrac{n}{2}t\cos\left(\dfrac{n}{2}+1\right)t}{\cos(n/2-2)t\cos(n/2-1)t}\,l_{n-1}(t),$$

откуда следует, что $(-1)^n(l_0 r_{n-1}-l_1)\leqslant 0$ при $t\in[\pi/(n+2),\pi/n]$. Значит, при этих $t P_n(z, t)=\pi_n(p_n(t), p_{n-1}(t), z)$, а Z_t есть характеристическое множество задачи (A, B), $A=p_n(t)$, $B=p_{n-1}(t)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Используя (2), (8) и (11), найдем выражение (3) для $\alpha(t)$, а также получим следующие равенства:

$$p_n(t)=\alpha(t),$$
$$p_{n-1}(t)=-\frac{\cos\left(\dfrac{n}{2}+1\right)t\left[\sin t\cos\dfrac{n}{2}t+\sin(n-1)t\cos\left(\dfrac{n}{2}-2\right)t\right]}{\sin t\sin 2t\sin(n-1)t}\,l_{n-1}(t). \tag{12}$$

Из (3) и (12) вытекает: $p_n(t)>0$ в $[\pi/(n+2),\pi/n]$ и $p_n(\pi/n)=0$, а $p_{n-1}(t)>0$ в $(\pi/(n+2),\pi/n]$ и $p_{n-1}(\pi/(n+2))=0$. Так как $p_{n-1}(t)>0$ при $t\in(\pi/(n+2),\pi/n]$, то при этих t в силу леммы

$$\pi_n(\lambda(t),1,z)=\frac{1}{p_{n-1}(t)}P_n(z,t),\quad \mu_n(\lambda(t),1)=\frac{1}{p_{n-1}(t)},$$

где $\lambda(t)=p_n(t)/p_{n-1}(t)$. Очевидно, $\lambda(t)>0$ в $(\pi/(n+2),\pi/n)$, $\lambda(\pi/n)=0$ и $\lambda(t)\to+\infty$ при $t\to\pi/(n+2)$. $\lambda(t)$ строго убывает в $(\pi/(n+2),\pi/n]$. Действительно, характеристическое множество задачи $(\lambda, 1)$ содержит ровно n точек ([1], стр. 406), а полином $\pi_n(\lambda, 1, z)$ единствен и при $\lambda>0$ имеет на $|z|=1$ не более n точек отклонения; значит, характеристическое множество задачи $(\lambda, 1)$ единственно при каждом $\lambda>0$, отсюда и вытекает строгая монотонность $\lambda(t)$.

Таким образом, если задано $\lambda\geqslant 0$, а t есть лежащий на $[\pi/(n+2),\pi/n]$ корень уравнения $\lambda=\lambda(t)$, т. е. уравнения (4), то формулы (1) дают решение задачи $(\lambda, 1)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Рассуждая от противного, нетрудно показать, что $\mu_n(\lambda, 1)$ строго возрастает в $[0,+\infty)$.

Замечание 2. К рассмотренной выше задаче (A, B) сводится более общая задача: пусть n, $n \geqslant 2$, и p, $0 \leqslant p < n$,— заданные натуральные числа, а A и B — заданные комплексные числа; среди алгебраических полиномов

$\sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ с фиксированными коэффициентами $c_n = A$ и $c_p = B$ найти наименее

отклоняющийся от нуля на $|z| \leqslant 1$ (см. ([1]), стр. 337).

В заключение приношу глубокую благодарность проф. Н. А. Лебедеву, оказавшему мне существенную помощь в работе над этой статьей.

Ленинградский политехнический институт
им. М. И. Калинина

Поступило
5 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев*, Конструктивная теория функций комплексного переменного, «Наука», 1964. [2] *Н. А. Лебедев, И. Ю. Рыжаков*, Вестн. Ленингр. унив., № 13, в. 3, 39 (1969).