Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 4

УДК 517.92 *МАТЕМАТИКА*

Н. САТИМОВ

К ЗАДАЧЕ УБЕГАНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С НЕЛИНЕЙНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 14 I 1974)

А. Рассматривается дифференциальная игра

$$\dot z = Cz + f(u, v); \tag{1}$$

здесь z — фазовый вектор игры, принадлежащий заданному n-мерному векторному эвклидову пространству R^n, C — заданное линейное отображение R^n в себя; u, v — управляющие параметры, u — параметр преследования, v — параметр убегания, $u \in P$, $v \in Q$, P и Q — заданные непустые компактные подмножества p-мерного и q-мерного векторных эвклидовых пространств R^p и R^q соответственно; f — заданное непрерывное отображение множества $P \times Q$ в R^n. Далее, в R^n выделено непустое терминальное множество M, которое предполагается векторным пространством размерности $\leqslant n-2$. Игра считается оконченной, когда z попадает на множество M.

Будем говорить, что из точки $z_0 \in R^n \setminus M$ можно уклониться от встречи с множеством M, если по любой измеримой функции $u = u(t)$ можно построить такую измеримую функцию $v = v(t)$, что точка $z(t)$, являющаяся решением уравнения

$$\dot z = Cz + f(u(t), v(t)), \qquad z(0) = z_0 \tag{2}$$

не попадает на множество M ни при каком значении времени t, $0 < t < \infty$. При этом для нахождения значения $v(t)$ параметра $v \in Q$ в каждый момент времени $t \geqslant 0$ разрешается использовать значения $z(s)$ и $u(s)$ на отрезке $t-\theta \leqslant s \leqslant t$, где θ — подходящим образом выбранное положительное число.

Если можно уклониться от встречи с множеством M из любой точки $z_0 \in R^n \setminus M$, то будем говорить, что в игре (1) возможно убегание ([1-4]).

Б. Через L обозначим ортогональное дополнение к M в R^n, через W — пока произвольное векторное подпространство пространства L, через π — оператор ортогонального проектирования из R^n на W.

В дальнейшем положительные константы, зависящие только от игры (1), но не зависящие ни от начальной точки игры, ни от управлений $u(t)$, $v(t)$, и только их будем называть константами.

Будем говорить, что выполнено условие разрешимости, если существуют векторное подпространство W пространства L, константа τ_0 и выпуклое компактное подмножество R пространства R^n такие, что для произвольных $u \in P$, $w \in R$ и $\tau \in (0, \tau_0]$ уравнение

$$\pi e^{\tau C} f(u, v) = \pi e^{\tau C}(w + \alpha_\tau) \tag{3}$$

разрешимо относительно совокупности (v, α_τ), где $v \in Q$, $\alpha_\tau \in V$, V — векторное подпространство пространства R^n, параллельное несущей плоскости $\{R\}$ множества R, и $\dim V = \dim \{R\}$. При этом: а) компонента v решения (v, α_τ) уравнения (3) зависит от u, w, но не зависит от τ, $|\alpha_\tau(u, w)| = O(\tau)$ равномерно относительно $u \in P$, $w \in R$; б) если функции $u(s) \in P$, $w(s) \in R$ измеримы, то измеримы и функции $v(u(s), w(s))$, $\alpha_s(u(t-s), w(t-s))$ при каждом фиксированном $t \in (0, \tau_0]$, $0 \leqslant s \leqslant t$.

Мы скажем, что имеет место тонкий случай, если выполнено условие разрешимости, причем $\dim W = 2$; кроме того: в) компонента $\alpha_\tau(u, w)$ решения (v, α_τ) уравнения (3) по переменному w удовлетворяет условию Липшица, точнее, $|\alpha_\tau(u, w_1)-\alpha_\tau(u, w_2)|\leqslant\beta_\tau(u)|w_1-w_2|$ для всех $\tau\in(0, \tau_0]$, $u\in P$, $w_1\in R$, $w_2\in R$, $\beta_\tau(u)\geqslant 0$, $|\beta_\tau(u)|=O(\tau)$ равномерно относительно $u\in P$; г) в плоскости W не существует такой фиксированной прямой W_1, чтобы для всех $\tau\in(0, \tau_0]$ имело бы место включение $\pi e^{\tau C}R\overset{*}{\subset}W_1$ (относительно операции $\overset{*}{\subset}$ см. ([1])).

Теорема 1. *Пусть имеет место тонкий случай. Тогда в игре* (1) *возможно убегание. При этом игру можно вести таким образом, что для расстояний* $\xi(t)$ *и* $\eta(t)$ *до подпространств* M *и* L *соответственно будет иметь место неравенство*

$$\xi(t)>\begin{cases} c\varepsilon^m/[1+\eta(t)]^m, & \xi_0\geqslant\varepsilon, \quad 0\leqslant t<\infty,\\ c\xi_0{}^m/[1+\eta(t)]^m, & \xi_0<\varepsilon, \quad 0\leqslant t<\theta,\\ c\varepsilon^m/[1+\eta(t)]^m, & \xi_0<\varepsilon, \quad \theta\leqslant t<\infty,\end{cases} \tag{4}$$

где c, ε, m — *константы.*

Мы скажем, что имеет место грубый случай, если выполнено условие разрешимости, причем $\dim W=2$; кроме того: д) для всех $\tau\in(0, \tau_0]$ $\dim\pi e^{\tau C}R=2$; е) ранг первого ненулевого отображения A_k в разложении $\tau^kA_k+\tau^{k+1}A_{k+1}+\ldots$ аналитического отображения $\pi e^{\tau C}$: $V\to W$ равен 2.

Теорема 2. *В грубом случае в игре* (1) *возможно убегание. При этом игру можно вести так, что будет иметь место оценка* (4).

Будем говорить, что имеет место промежуточный случай, если выполнено условие разрешимости, причем $W=L$; кроме того: $\dim\pi e^{\tau C}R=\dim L$ для всех $\tau\in(0, \tau_0]$.

Теорема 3. *Если имеет место промежуточный случай, то в игре* (1) *возможно убегание. При этом игру можно вести таким образом, что будет справедлива оценка* (4).

Замечание 1. В оценке (4), гарантируемой теоремами 2 и 3, константы c, ε и m, вообще говоря, будут отличаться от соответствующих констант, участвующих в (4).

В. Предположим, что для игры (1) выполнены все условия теоремы убегания из работы ([4]), т. е. существуют двумерное подпространство $W\subset L$ и натуральное число k такие, что: ж) каждое из множеств $\pi C^if(P, Q)$, $i=0, 1, \ldots, k-2$, есть точка; з) множество $N=\cap\pi C^{k-1}f(u, Q)$, $u\in P$, содержит внутреннюю (относительно W) точку.

Покажем, что для игры (1) имеет место грубый случай. Действительно, не ограничивая общности, можно считать, что $f(P, Q)\ni 0$, точка 0 является внутренней для множества N. Через Co $[f(P, Q)]$ обозначим выпуклую оболочку в R^n множества $f(P, Q)$, через V — несущую плоскость множества Co $[f(P, Q)]$. Так как $f(P, Q)\ni 0$, то $V=\{\mathrm{Co}[f(P, Q)]\}$. При достаточно малой константе c_1 квадрат $\Omega=\{|\omega^i|\leqslant c_1, i=1, 2\}$ плоскости W содержится в N. Пусть $R=[\pi C^{k-1}]^{-1}\Omega\cap\mathrm{Co}[f(P, Q)]$. Ясно, что $\pi C^{k-1}R=\Omega$, R — выпуклый компакт, $R\subset V$, $\dim R=\dim V$. Элементарные вычисления показывают, что если $v=v(u, w)$ — наименьшее в лексикографическом смысле решение уравнения $\pi C^{k-1}f(u, v)=\pi C^{k-1}w$, $w\in R$, $\alpha_\tau=\alpha_\tau(u, w)$ находится из уравнения

$$\left[\frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!}\pi C^{k-1}+\ldots\right]\alpha_\tau=\left[\frac{\tau^k}{k!}\pi C^k+\ldots\right][f(u, v(u, w))-w], \qquad \alpha_\tau\in V,$$

то совокупность $(v(u, w), \alpha_\tau(u, w))$ удовлетворяет условию разрешимости пункта Б.

Далее легко убедиться, что и условия д) и е) пункта Б также выполнены. Следовательно, при выполнении всех условий теоремы убегания из работы ([4]) имеет место грубый случай.

Г. В этом и следующем пунктах рассматривается дифференциальная игра

$$\dot z=Cz-u+v+a, \quad z\in R^n, \quad u\in P\subset R^n, \quad v\in Q\subset R^n, \quad a\in R^n, \tag{5}$$

где преобразование C, терминальное множество M те же, что и в игре (1); P и Q — выпуклые компакты, a — заданный постоянный вектор.

Пусть для игры (5) выполнены все условия теоремы убегания из работы ([2]). Через U и V обозначим векторные подпространства R^n, содержащие множества P и Q соответственно, причем $\dim U = \dim P$, $\dim V = \dim Q = \dim L$ через f_τ и g_τ — линейные отображения $\pi e^{\tau C}$: $U \to W$ и $\pi e^{\tau C}$: $V \to W$ соответственно. Отображение $h_\tau = g_\tau^{-1} f_\tau$ пространства U в пространство V является аналитическим при достаточно малых значениях τ ([2]). Существует шар $R = \{|w| \leqslant \delta\} \subset V$ такой, что вектор $v = v(u, w) = w + h_0(u)$ при всех $u \in P$, $w \in R$ принадлежит множеству Q ([2]). Пусть $\alpha_\tau = \alpha_\tau(u, w) = h_0(u) - h_\tau(u)$. Тогда для всех достаточно малых положительных значений τ

$$\pi e^{\tau C}[-u+v(u, w)] = g_\tau[v(u, w) - h_\tau(u)] = g_\tau[w + \alpha_\tau(u, w)] = \\ = \pi e^{\tau C}[w + \alpha_\tau(u, w)]. \qquad (6)$$

С другой стороны, для всех достаточно малых положительных значений τ

$$\dim \pi e^{\tau C} R = \dim L.$$

Следовательно, при выполнении всех условий теоремы убегания из работы ([2]) имеет место промежуточный случай.

Как известно ([1-4]), для контрольного примера, описываемого системой уравнений

$$\dot z_1 = z_2 - z_3, \quad \dot z_2 = -\alpha z_2 - \rho u, \quad \dot z_3 = -\beta z_3 + \sigma v, \qquad (7)$$

где $z_i \in R^\nu$, $i = 1, 2, 3$, $\nu \geqslant 2$; α, β, ρ, σ — неотрицательные числа, $|u| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$, $M = \{z_1 = 0\}$, $\sigma > \rho$, и для задачи «мальчик» и «крокодил»

$$\dot z_1 = z_2 + v, \quad \dot z_2 = -u, \quad z_i \in R^\nu, \quad i = 1, 2, \quad \nu \geqslant 2; \quad |u| \leqslant 1, \quad |v| \leqslant 1, \qquad (8)$$
$$M = \{z_1 = 0\}$$

выполнены все условия работы ([2]). Легко убедиться, что для контрольного примера

$$v(u, w) = -\frac{\rho}{\sigma} u + w, \quad |w| \leqslant 1 - \frac{\rho}{\sigma}; \quad \alpha_\tau(u, w) = \rho\left(\frac{e_1}{f_1} - 1\right), \qquad (9)$$

где $e_1 = \dfrac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\tau})$, $f_1 = \dfrac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta\tau})$,

а для задачи «мальчик» и «крокодил»

$$v(u, w) = w, \quad |w| \leqslant 1, \quad \alpha_\tau(u, w) = -\tau u. \qquad (10)$$

Д. Предположим, что для игры (5) выполнены условия убегания В), § 5 работы ([3]). Тогда существует такое аналитическое отображение h_τ': $U \to V$, что $f_\tau = g_\tau h_\tau'$ и $h_\tau' = g_\tau^{-1} f_\tau$. Далее, существует шар $R = \{|w| \leqslant \gamma\} \subset V$ такой, что $v = w + h_0'(u) \in Q$ при всех $u \in P$, $w \in R$. Пусть $v(u, w) = w + h_0'(u)$, $\alpha_\tau(u, w) = h_0'(u) - h_\tau'(u)$. Тогда $\pi e^{\tau C}[-u + v(u, w)] = g_\tau[w + \alpha_\tau(u, w)] = \pi e^{\tau C}[w + \alpha_\tau(u, w)]$ для всех достаточно малых положительных значений τ и произвольных $u \in P$, $w \in R$. Ясно, что множество R удовлетворяет условию г) п. Б. Следовательно, если для игры (5) выполнены условия убегания В), § 5 работы ([3]), то имеет место тонкий случай.

Замечание 2. В игре (5) при выполнении условий убегания работ ([2]) и ([3]) компонента $\alpha_\tau(u, w)$ решения $(v(u, w), \alpha_\tau(u, w))$ уравнения (3) не зависит от w. Поэтому условие Липшица по переменному w выполнено автоматически (условие в) п. Б).

Е. Рассмотрим дифференциальную игру

$$\dot z_1 = z_2, \quad \dot z_2 = (u - v)^2, \quad z_i \in R^1, \quad i = 1, 2; \quad 0 \leqslant u \leqslant 1, \quad 2 \leqslant v \leqslant 3; \quad M = \{0\}. \qquad (11)$$

Легко убедиться, что для игры (11) не выполнены условия убегания работы ([4]).

С другой стороны, так как $\pi e^{\tau C} f(u,v)=(u-v)^2 \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}$, то при всех $w \in R=\{w_1=0, 1 \leqslant w_2 \leqslant 2\}$ уравнение (3) имеет решение $v=v(u, w)$, $\alpha_\tau=0$ при всех значениях τ, ибо, очевидно, для $v(u, w)=u+\sqrt{w_2}$ имеем $\pi e^{\tau C} f(u, v(u, w))=\pi e^{\tau C} w$. Далее, множество $\pi e^{\tau C} R=\{z_1=w_2\tau, z_2=w_2, 1 \leqslant w_2 \leqslant 2\}$, как в этом нетрудно убедиться, удовлетворяет условию г) п. Б. Следовательно, для игры (11) имеет место тонкий случай.

Выражаю искреннюю благодарность Е. Ф. Мищенко за ценные советы и обсуждение.

Ташкентский государственный университет

Поступило 27 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. С. Понтрягин, Е. Ф. Мищенко,* Дифференциальные уравнения, т. 7, № 3, 436 (1972). [2] *Л. С. Понтрягин,* ДАН, т. 191, № 2, 283 (1970). [3] *Л. С. Понтрягин,* Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 112, 30 (1971). [4] *Е. Ф. Мищенко, Н. Сатимов,* Дифференциальные уравнения, т. 9, № 10, 1792 (1973).