Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 5

УДК 513.88 *МАТЕМАТИКА*

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ОПЕРАТОРНОЙ ТЕОРИИ ШОКЕ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 13 VIII 1973)

Работы последнего времени ([1-4]) показывают, что естественной категорией, в рамках которой должна строиться теория Шоке, является категория пространств Канторовича. Однако имеющиеся в этом направлении результаты как правило используют два обременительных условия — требование коинициальности порождающего упорядоченность Шоке конуса и требование полной линейности рассматриваемых операторов. Цель настоящей работы — заполнить имеющиеся щели в различных направлениях как для получения теоремы декомпозиции, так и для характеристики максимальных операторов.

Пусть X — архимедов K-линеал, а Y — некоторое K-пространство. Через $L^+(X, Y)$ обозначается множество положительных линейных операторов из X в Y. Пусть, далее, X^n — соответствующая степень X, а Δ: $x \to (x, \dots, x)$ — диагональный оператор, Δ: $X \to X^n$. Через Δ^* обозначим оператор из X^n в X, действующий по формуле $\Delta^*(x_1, \dots, x_n) = x_1 \vee \dots \vee x_n$.

Оператор $\check{S}$: $X^n \to Y$ называется с в е р х р а з б и е н и е м оператора S и $L^+(X, Y)$, если $\check{S} = S\Delta^*$. Оператор $\hat{S}$ из $L^+(X^n, Y)$ называется р а з б и е н и е м оператора S из $L^+(X, Y)$, если коммутативна диаграмма

$$Y \xleftarrow{S} X \xrightarrow{\Delta} X^n \xrightarrow{\hat{S}} Y.$$

П р е д л о ж е н и е 1. а) *Линейный оператор A опорен к сверхразбиению $\check{S}$ в том и только том случае, если A — разбиение S.*

б) *Для каждого x из X^n существует разбиение $\hat{S}$ такое, что $\check{S}x = \hat{S}x$.*

в) *Имеет место представление $\check{S}x = \sup\{\hat{S}x: \hat{S}\Delta = S\}$, $x \in X^n$.*

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть S, $T \in L^+(X, Y)$ и H — конус в X^n. Тогда $(\forall \hat{T} \exists \hat{S}: \hat{S} \in \operatorname{Spr}(\hat{T}, H)) \Rightarrow \forall h \in H \ \check{S}h \geq \check{T}h$.*

Здесь для оператора $T \in L^+(X, Y)$ и конуса H в X положено

$$\operatorname{Spr}(T, H) = \{T' \in L^+(X, Y): T'h \geq Th, \quad h \in H\}.$$

Напомним, что множество $\operatorname{Spr}(T, H)$ называется п о л о ж и т е л ь н ы м р о с т к о м о п е р а т о р а T н а к о н у с е H.

З а м е ч а н и е 1. Впервые подобное предложение для случая выпуклых поверхностей установил Ю. Г. Решетняк ([5]).

В теории Шоке существенную роль играют ситуации, когда предложение 2 можно обратить. В этом случае говорят, что имеет место теорема декомпозиции.

Т е о р е м а 1. *Если H — подпространство или если X — отделимый локально-выпуклый K-линеал, Y — K-пространство ограниченных элементов и S, T непрерывны, то имеет место теорема декомпозиции.*

З а м е ч а н и е 2. Доказательство теоремы 1 в первом случае может быть проведено по схеме Картье — Фелла — Мейе (см., например, ([6])). Во втором случае, к сожалению, приходится прибегать к обходному маневру — использовать связь сублинейных операторов и селекторов ([7]) и известную теорему Хасуми ([8]).

Перейдем теперь к характеристике максимальных операторов. Оператор $T\in L^+(X, Y)$ называется максимальным относительно конуса H, если $\mathrm{Spr}(T, H)=\{T\}$. Максимальные операторы возникают в разнообразных задачах теории Шоке — в выпуклом анализе, теории приближений, геометрии сфор и т. д. Важная характеристика таких операторов связана с задачей о пробных функциях (см., например, ([3])).

Т е о р е м а 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) *Оператор T максимален относительно конуса H;*

б) *Если поточечно ограниченная сеть (T_α) операторов из $L^+(X, Y)$ такова, что $\varliminf_\alpha T_\alpha h\geqslant Th$, $h\in H$, то $(o)-\lim_\alpha T_\alpha x=Tx$ для $x\in X$.*

Из теоремы декомпозиции следует, что максимальные относительно верхней решетки операторы заполняют конус, являющийся верхней решеткой в пространстве операторов. Более того, справедлива

Т е о р е м а 3. *Пусть H коинициален X. Тогда для всякого оператора T из $L^+(X, Y)$ существует оператор $\bar{T}\in\mathrm{Spr}(T, H)$ такой, что $\mathrm{Spr}(\bar{T}, H)=$ $=\mathrm{Spr}(\bar{T}, H-H)$.*

Из этой теоремы (представляющей аналог леммы о выметании) следует, что максимальные операторы существуют на достаточно больших конусах. Точнее, справедливо

П р е д л о ж е н и е 3. *На конусе H существуют максимальные операторы со значениями в некотором (а, значит, и в любом) регулярно упорядоченном K-пространстве в том и только том случае, если множество верхних границ элементов H плотно в X в регулярной топологии.*

Как правило, изучение максимальных операторов ведется с помощью подъема на некоторое (регулярно упорядоченное) K-пространство Z. Именно, рассматривается коммутативная диаграмма

$$Y\xleftarrow{T}X\xrightarrow{U}Z\xrightarrow{P}Y.$$

Роль границы Шоке при этом, естественно, должна играть компонента в Z. Ограничимся для простоты случаем, когда U есть (монотонное) вложение X в Z. В этой ситуации оператор $P\in L^+(Z, Y)$ называется H-надмаксимальным, если T максимален.

Т е о р е м а 4. *В булевой алгебре проекторов Z существует наибольший H-надмаксимальный проектор.*

Проектор P_{Ch}, определенный теоремой 4, называют **п р о е к т о р о м Ш о к е**, а соответствующую компоненту — **к о м п о н е н т о й Ш о к е**. Используются также обозначения $P_{\mathrm{Ch}(H,\,X,\,Z)}$ и $\mathrm{Ch}(H, X, Z)$.

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что для проектора P справедливо $\mathrm{Spr}(P, H)=\mathrm{Spr}(P, P(H))$, где $P(H)$ — наименьшая верхняя решетка, порожденная H. Таким образом, приведенное определение проектора Шоке в случае коинициальности H пространству X совпадает с введенным В. Н. Дятловым ([9]).

Т е о р е м а 5. *Пусть $\overline{P(H)-P(H)}=X$ и $T\in L^+(Z, Y)$ — некоторый вполне линейный H-надмаксимальный оператор. Тогда компонента его существенной положительности содержится в компоненте Шоке $\mathrm{Ch}(H, X, Z)$.*

З а м е ч а н и е 4. Существенно, что теоремы 4 и 5 относятся к общему случаю и работают, в частности, в L^p. Одна полезная в этом случае связь границ описывается соотношением $\mathrm{Ch}(H, X, Z)\subset\mathrm{Ch}(H, Z, Z)$, если $\bar{X}=Z$ (где замыкание, как обычно, берется в регулярной топологии).

З а м е ч а н и е 5. Очевидно, что обращение теоремы 5 вообще говоря, не справедливо. Для коинициального конуса нужное дополнительное условие заключается в требовании фильтрации вправо опорных множеств.

В заключение приведем некоторые характеристики не обязательно вполне линейных максимальных операторов.

Конус H в X называется Z-**т о т а л ь н ы м** (здесь $X\subset Z$), если любой оператор T из $L^+(Z, Z)$ является $(H-H)$-надмаксимальным.

Проектор P в Z называется H-граничным (в смысле Шилова), если $\forall h\in H \quad Ph\leqslant 0\Rightarrow h\leqslant 0$.

Предложение 4. *Пусть конус H является Z-тотальным и коинициальным Z. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

а) *Проектор P является H-граничным;*

б) *Для любого H-максимального оператора $T\in L^+(X, Y)$ имеет место высказывание $\forall x\in X \quad Px\leqslant 0\Rightarrow Tx\leqslant 0$.*

Пусть теперь H — коинициальный конус в Z и $P_b(H)$ — наименьшая условно полная верхняя решетка в Z, порожденная H (=конус H-выпуклых элементов в Z). Говорят, что выполнено условие подъема (в пространство Y), если

$$\operatorname{Spr}(T, H)=\operatorname{Spr}(T, P_b(H)), \quad T\in L^+(Z, Y).$$

Теорема 6. *Пусть $H\subset X\subset Z$ и выполнено условие подъема в пространство Y. Оператор T является H-надмаксимальным в том и только том случае, если $TP_{\mathrm{Ch}}(x-\mathrm{CO}_H x)=0$, $x\in X$.*

Здесь P^d — проектор, дополнительный к P и $\mathrm{CO}_H x=\sup\{h\colon h\leqslant x,\ h\in H\}$ — H-выпуклая оболочка x.

Следствие 1. *Если $TP^d_{\mathrm{Ch}}x=0$, $x\in X$, то T является H-надмаксимальным.*

Следствие 2. *Пусть U — множество H-мадмаксимальных операторов. Тогда компонента (U^{dd}), порожденная U, есть множество $\{T\colon |T|\in U\}$.*

Комбинация предложения 4 и теорема 6 позволяет, например, получить следующую эквивалентность теоремы Шоке и принципа максимума.

Теорема 7. *Пусть H — коинициальный, Z — тотальный конус, причем $H=P_b(H)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

а) *Проектор Шоке является H-граничным;*

б) *Оператор T из $L^+(Z, Y)$ является максимальным относительно конуса H в том и только том случае, если $TP^d_{\mathrm{Ch}}=0$.*

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
13 VIII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. F. Vincent-Smith*, J. London Math. Soc., v. 44, 3, 553 (1969). [2] *С. С. Кутателадзе, А. М. Рубинов*, УМН, т. 27, 3, 128 (1972). [3] *С. С. Кутателадзе*, ДАН, т. 208, № 4, 771 (1973). [4] *Z. Semadeni*, Banach Spaces of Continuous Functions, Warszawa, 1971. [5] *Ю. Г. Решетняк*, Диссертация, Л., 1954. [6] *E. Alfsen*, Compact Convex Sets and Boundary Integrals, Berlin, N. Y., 1971. [7] *Ю. Э. Линке*, ДАН, т. 207, № 3, 531 (1972). [8] *M. Hasumi*, Math. Ann., v. 179, 2, 83 (1969). [9] *В. Н. Дятлов*, ДАН, т. 212, № 5 (1973).