Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 5

УДК 530.12:531.51 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

Э. И. КУЧЕРЕНКО, А. В. ЛОСКУТОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

(*Представлено академиком А. А. Дородницыным 16 VII 1973*)

1. В релятивистской механике, отвечающей общей теории относительности и уравнениям поля Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta}-(\lambda+{}^1/_2R)\,g_{\alpha\beta}=\varkappa T_{\alpha\beta},\qquad \alpha,\beta=1,2,3,4,\tag{1}$$

действующим в пространстве — времени V_4, определяемом метрической формой $ds^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ (здесь и далее предполагается тензорное суммирование), возможна различная постановка задач.

В (1) $g_{\alpha\beta}$ — дважды ковариантный симметрический метрический тензор; λ — космологический член, не зависящий от $g_{\alpha\beta}$; $R_{\alpha\beta}=R^\sigma{}_{\alpha\sigma\beta}=g^{\sigma\tau}R_{\sigma\alpha\tau\beta}$, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — кососимметрический тензор кривизны; $R=R_\sigma{}^\sigma$ — скалярная свертка тензора кривизны; $T_{\alpha\beta}$ — симметрический тензор энергии — импульса;

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}={}^1/_2\,(\partial_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta}+\partial_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}-\partial_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma}-\partial_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta})+g^{\sigma\tau}(\Gamma_{\sigma,\,\alpha\delta}\Gamma_{\tau,\,\beta\gamma}-\Gamma_{\sigma,\,\alpha\gamma}\Gamma_{\tau,\,\beta\delta}),$$

где $\Gamma_{\sigma,\,\alpha\beta}$ — символ Кристоффеля, определяемый соотношением

$$\Gamma_{\sigma,\,\alpha\beta}={}^1/_2\,(\partial_\alpha g_{\beta\sigma}+\partial_\beta g_{\alpha\sigma}-\partial_\sigma g_{\alpha\beta}),$$

∂_α — производная по переменной x^α.

2. В данной работе предлагается приближенный метод прямых — Галёркина для отыскания решения смешанной задачи для уравнений поля Эйнштейна в пространстве $W_2^{(2,1)}(Q)$ С. Л. Соболева, полном в классе обобщенных функций. Смешанная задача для уравнений поля (1) состоит в отыскании компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x)$ так, чтобы на гиперповерхности $x^4=0$ и поверхности данной гиперповерхности S, ограничивающей область X, они удовлетворяли условиям

$$g_{\alpha\beta}|_{x^4=0}=F_{\alpha\beta}{}^1(x),\qquad \partial_4 g_{\alpha\beta}|_{x^4=0}=F_{\alpha\beta}{}^2(x);\qquad g_{\alpha\beta}|_S=F_{\alpha\beta}{}^3,\tag{2}$$

если в области $Q=X\times\{0\leqslant x^4\leqslant T\}$ искомые компоненты $g_{\alpha\beta}$ удовлетворяют уравнениям поля (1).

Уравнения поля (1) являются уравнениями гиперболического типа, так как путем введения локальной системы координат и линейными преобразованиями метрическое пространство V_4 изоморфно пространству с сигнатурой $(---+)$.

3. При комбинированном методе прямых — Галёркина приближенное решение смешанной задачи имеет вид

$$g_{\alpha\beta}{}^N(i\tau,x)=\sum_{j=1}^N b_{\alpha\beta}{}^j(i\tau)\,u_j(x)=g_{\alpha\beta}^{(N,i)},\tag{3}$$

где $b_{\alpha\beta}{}^j$ — симметрическая матрица по α и β, заданная в узлах сетки ω_τ, покрывающей временной интервал x^4, с шагом τ и определяемая по методу Галёркина; $\{u_j\}_{=1}^{N}$ — базисные функции в методе Галёркина.

При использовании комбинированного метода производные по x^4, входящие в уравнения (1), заменяются конечно-разностными отношениями

$$g_{\alpha\beta,x^4}=\frac{1}{\tau}(\hat{g}_{\alpha\beta}-g_{\alpha\beta}),\quad g_{\alpha\beta,\bar{x}^4}=\frac{1}{\tau}(g_{\alpha\beta}-\check{g}_{\alpha\beta});$$

$$g_{\alpha\beta,x^4\bar{x}^4}=\frac{1}{\tau^2}(\hat{g}_{\alpha\beta}-2g_{\alpha\beta}+\check{g}_{\alpha\beta});\quad g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}(x^4,x);$$

$$\hat{g}_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}(x^4+\tau,x),\quad \check{g}_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}(x^4-\tau,x).$$

Система дифференциальных уравнений (1) заменяется на систему алгебраическо-дифференциальных уравнений

$$R_{\alpha\beta}^{(N,i)}-(\lambda^{(i)}+{}^1/_2R^{(N,i)})g_{\alpha\beta}^{(N,i)}=\varkappa T_{\alpha\beta}^{(i)}, \tag{4}$$

где индексы i, N указывают, что компоненты метрического тензора заменяются приближенным решением (3) и временные производные — конечно-разностными отношениями, (2) заменяем конечно-разностными условиями.

Следуя далее методу Галёркина, домножим уравнение (4) на базисные функции u_k, $k\in 1, N$, и, проинтегрировав по области X, получим систему алгебраических уравнений на систему коэффициентов:

$$\int\limits_X (R_{\alpha\beta}^{(N,i)}-(\lambda^{(i)}+{}^1/_2R^{(N,i)})g_{\alpha\beta}^{(N,i)})u_k dX=\varkappa\int\limits_X T_{\alpha\beta}^{(i)}u_k dX. \tag{5}$$

Лемма 1. *Метод прямых разрешим.*

Доказательство. Сворачивая уравнения (1) по α и β, получим $R=-\varkappa T-4\lambda$, где $T=T^\alpha{}_\alpha$, и тогда система (1) будет эквивалентна группе уравнений

$$-{}^1/_2g^{44}\partial_{44}g_{ij}+\Omega_{ij}=\varkappa T_{ij}-(\lambda-{}^1/_2\varkappa T)g_{ij}, \tag{6а}$$

$${}^1/_2g^{4j}\partial_{44}g_{ij}+\Omega_{4i}=\varkappa T_{4i}-(\lambda-{}^1/_2\varkappa T)g_{4i}, \tag{6б}$$

$$-{}^1/_2g^{ij}\partial_{44}g_{ij}+\Omega_{44}=\varkappa T_{44}-(\lambda-{}^1/_2\varkappa T)g_{44},\quad i,j\in 1,3, \tag{6в}$$

где $\Omega_{\alpha\beta}$ составляется из первых производных и оставшихся вторых производных. Так как гиперповерхность $x^4=0$ ориентирована в пространстве, то $g^{44}\neq 0$ и из уравнений (6а) можно определить все производные вида $\partial_{44}g_{ij}$. Что касается производных типа $\partial_{44}g_{4\alpha}$, $\alpha\in 1,4$, то они вообще не входят в уравнения (6), так как все компоненты тензора кривизны вида $R_{44\alpha4}=0$.

Разделив уравнения (6а) на g^{44} и используя конечно-разностные отношения и приближенное решение (3), а также домножив на базисные функции и проинтегрировав по области X, получим

$$\sum_{l=1}^{N}\gamma^{lm}b_{ij}{}^l(x^4+\tau)=f_{ij}{}^m(b_{ij}{}^m(x^4),\quad b_{ij}{}^m(x^4-\tau),\lambda,T), \tag{7}$$

где $\gamma^{lm}=\int\limits_X u_l(x)u_m(x)dX$; $f_{ij}{}^m$ — функции, зависящие от $b_{ij}{}^m$ в предшествующие моменты времени, а также от λ и тензора энергии — импульса.

Так как базисные функции образуют полную систему, то тогда существует обратная матрица $(\gamma^{lm})^{-1}$ и (7) можно переписать как

$$b_{ij}{}^l=F_{ij}{}^l(b_{ij}{}^m(x^4),\ b_{ij}{}^m(x^4-\tau),\ \lambda,\ T),$$

что и доказывает разрешимость, так как значения коэффициентов $b_{ij}{}^m(0)$ и $b_{ij}{}^m(\tau)$ находятся из начальных условий, замененных конечно-разностными отношениями.

4. Существование смешанной задачи будем рассматривать на шаре радиуса R_1 в пространстве $W_2{}^{(2,1)}(Q)$, норма элементов в котором задается

соотношением

$$\|u\|^2_{W_2^{(2,1)}(Q)}=\int\limits_Q\left(\sum_{i=0}^{2}\sum_{h=1}^{3}\left(\frac{\partial^i u}{\partial x^{hi}}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x^4}\right)^2\right)dQ.$$

Введем метрическое пространство B, метрика в котором задается формулой $\rho(u_i, u_j)=\max\limits_{i,j}\|u_i-u_j\|_{W_2^{(2,1)}(X)}$, где $W_2^{(2,1)}(X)$ — пространство с нормой $W_2^{(2,1)}(Q)$, но интегрирование ведется по области X.

К уравнению (4) добавим эллиптический оператор второго порядка $A_0 g_{\alpha\beta}^{(N,i)}=\Delta g_{\alpha\beta}^{(N,i)}$ и, применяя затем обратный оператор A_0^{-1}, получим

$$g_{\alpha\beta}^{(N,i)}=\int\limits_X G(P,Q)\,[\varkappa T_{\alpha\beta}^{(i)}+(\lambda+{}^1/_2\tilde{R}^{(N,i)})\,g_{\alpha\beta}^{(N,i)}-R_{\alpha\beta}^{(N,i)}]\,dX, \tag{8}$$

где $G(P, Q)$ — функция Грина, как решение эллиптического уравнения $\Delta g_{\alpha,\beta}^{(N,i)}=0$ с граничными условиями (2); $\tilde{R}^{(N,i)}=R^{(N,i)}+A_0$.

Введя элементи $u=\{g_{\alpha\beta}^{(N,i)}\}_{\alpha\beta=1}^{4}$ и оператор P как матрицу в правой части (8), можем записать (8) в виде

$$u=Pu \tag{9}$$

и, определив норму u в пространстве $W_2^{(2,1)}$ как

$$\|u\|^2_{W_2^{(2,1)}}=\sum_{\alpha>\beta=1}^{4}\|g_{\alpha\beta}\|^2_{W_2^{(2,1)}},$$

получим следующее утверждение.

Теорема 1. *Оператор P в пространстве B липшиц-непрерывен с постоянной $\gamma=f(R_1, m)$ $(\mathrm{mes}\,X)^{1/2}$, зависящей от радиуса шара R_1 пространства $W_2^{(2,1)}(Q)$ и постоянной вложения пространства $W_2^{(2,1)}$ в $W_4^{(1,1)}$* ([1]).

Лемма 2. *Оператор P вполне непрерывен в пространстве B.*

Лемма 3. *Решение уравнения* (9) *существует и единственно в пространстве B, а метод Галёркина сходится и разрешим, если постоянная* $\gamma<1$.

Из условий лемм 1—3 и теоремы 1 вытекает основной результат о комбинированном методе.

Теорема 2. *Если P является оператором сжатия на шаре радиуса R_1 в пространстве $W_2^{(2,1)}(Q)$ с постоянной сжатия γ и $g_{\alpha\beta}^N(0, x)$, $g^N_{\alpha\beta,x^4}(0,x)$ и $g_{\alpha\beta}^N|_S$ таковы, что слабо сходятся к $F_{\alpha\beta}^1$, $F_{\alpha\beta}^2$ и $F_{\alpha\beta}^3$ соответственно, то последовательность $g_{\alpha\beta}^{(N,i)}$ слабо сходится $g_{\alpha\beta}$, где $g_{\alpha\beta}$ — решение смешанной задачи* (1), (2).

Применение данного комбинированного метода позволяет улучшить постоянную сжатия по сравнению с методом Галёркина, применявшегося авторами ранее ([2, 3]).

Рязанский радиотехнический институт

Поступило 12 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Л. Соболев*, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. [2] *Э. И. Кучеренко, А. В. Лоскутов*, К вопросу о существовании и единственности решения уравнений Эйнштейна. III Межвузовск. конфер. по проблемам геометрии, Казань, 1967. [3] *Э. И. Кучеренко, А. В. Лоскутов*, Уч. зап. Казанск. гос. унив., т. 3, № 129, Казань, 1968.