Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 5

УДК 517.564:517.94 *МАТЕМАТИКА*

В. Ф. ЛАЗУТКИН, Т. Ф. ПАНКРАТОВА

АСИМПТОТИКА ШИРИНЫ ЛАКУН В СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

(*Представлено академиком В. И. Смирновым 3 IX 1973*)

1. Рассматривается самосопряженный оператор L в пространстве $\mathscr{L}_2(-\infty, +\infty)$, порожденный дифференциальным выражением

$$ly = -y'' + q(x)y, \tag{1}$$

где $q(x)$ — 2π-периодическая непрерывная функция, удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям гладкости. Как известно (см. ([1], [2])), спектр оператора L состоит из последовательности замкнутых интервалов, разделенных в общем случае лакунами $\Delta_n = (\lambda_n^-, \lambda_n^+)$, $n=1, 2, \ldots$, причем граничными точками лакун служат собственные числа задач Штурма — Лиувилля на интервале $[0, 2\pi]$, порожденных дифференциальным выражением (1) и периодическими (для четных n) и антипериодическими (для нечетных n) краевыми условиями. В настоящей работе изучается асимптотика ширины лакун Δ_n при $n \to +\infty$.

Теорема. *Пусть потенциал $q(x)$ имеет $2M$ непрерывных производных (M — положительное целое число) и $q^{(2M)}$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|q^{(2M)}(x') - q^{(2M)}(x'')| \leqslant C|x' - x''|.$$

Тогда справедлива следующая оценка для ширины n-ой лакуны в спектре оператора L при $n \to +\infty$:

$$|\Delta_n| = (\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2)^{1/2} + O(n^{-4M-2}). \tag{2}$$

Числа $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$ — коэффициенты Фурье некоторой функции $\hat{Q}(x)$:

$$\hat{a}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \hat{Q}(x)\cos nx\, dx, \quad \hat{b}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \hat{Q}(x)\sin nx\, dx,$$

$$\hat{Q}(x) = \sum_{k=0}^{2M} q_k(x). \tag{3}$$

Слагаемые в (3) расположены в порядке убывания их вкладов в $\hat{a}_n$ и $\hat{b}_n$, $q_k^{(2M+k)}$ удовлетворяет условию Липшица. Функция $q_k(x)$ вычисляется, исходя из функции $q(x)$, посредством алгебраических операций сложения, произведения и умножения на число и операций интегрирования, примененных в конечном числе. В частности,

$$q_0(x) = q(x), \quad q_1(x) = -\left(\int_0^x \varphi(t)\, dt\right)^2,$$

$$\frac{d^2}{dx^2} q_2(x) = -\varphi(x)\left[\frac{1}{2}\left(\int_0^x \varphi(t)\, dt\right)^2 - 3\varphi(x)\right],$$

$$\varphi(x) = -2\left(q(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(t)\,dt\right).$$

Разумеется, в случае произвольного потенциала $q(x)$ вклад от первого члена в (2) может оказаться меньше по порядку, чем погрешность для бесконечного множества значений n. Нетрудно показать, однако, что потенциалы, удовлетворяющие условиям теоремы и дополнительному условию: «существует положительная константа C_1, такая, что для всех $n > C_1^{-1}$ выполняется неравенство $(a_n^2 + b_n^2) > c_1 n^{-2M-2}$», образуют, всюду плотное множество в C^{2M}.

Ниже изложено доказательство теоремы.

2. Сделаем некоторое преобразование в исходной задаче, являющееся модификацией метода ВКБ ([5]). Известно (см. ([1])), что $\lambda_n^{\pm} = {}^1/_4 n^2 + O(1)$. Считая, что параметр λ лежит в окрестности ${}^1/_4 n^2$, сделаем в уравнении

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \tag{4}$$

замену переменной, $x \to \xi$, функции $y \to Y = (d\xi/dx)^{1/2} y$ и спектрального параметра $\lambda \to \Lambda$ по формулам:

$$\xi(x) = x + \sum_{k=1}^{M} n^{-2k} \int_0^x \varphi_k(t)\,dt, \tag{5}$$

$$\lambda = {}^1/_4 n^2 + \sum_{k=0}^{M-1} \gamma_k n^{-2k} + \gamma n^{-2M}, \tag{6}$$

$$\Lambda = {}^1/_4 n^2 + \gamma n^{-2M}. \tag{7}$$

Функции φ_k дважды непрерывно дифференцируемые, 2π-периодические, удовлетворяющие условию

$$\int_0^{2\pi} \varphi_k(t)\,dt = 0. \tag{8}$$

Лемма 1. *Функции $\varphi_k(t)$ и числа γ_k можно подобрать так, что уравнение* (4) *преобразуется к виду*

$$-Y''_{\xi^2} + n^{-2M} Q_n(x(\xi), \gamma) Y = \Lambda Y, \tag{9}$$

где $Q_n(x, \gamma) = \tilde{Q}_n(x) + \gamma n^{-2} \tilde{\tilde{Q}}_n(x)$. Функции $\tilde{Q}_n(x)$ и $\tilde{\tilde{Q}}_n(x)$ ограничены константами, не зависящими от n, и удовлетворяют условию Липшица с константой, не зависящей от n.

Лемма 1 доказывается подстановкой выписанных выше выражений, связывающих x и ξ, y и Y, λ и Λ в (4). Для определения функций φ_k получается последовательность рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= -2(q(x) - \gamma_0),\\
\varphi_2(x) &= -\varphi_1'' - {}^1/_2\varphi_1^2 + \gamma_1,\\
\varphi_3(x) &= -\varphi_2'' + \varphi_1''\varphi_1 - {}^1/_2\varphi_1\varphi_2 + {}^3/_4\varphi_1^2 + \gamma_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varphi_{k+1}(x) &= -\varphi_k'' + \varphi_{k-1}''\varphi_1 - \varphi_k\varphi_1 + F(\varphi_k, \varphi_{k-1}, \varphi_{k-2}'', \ldots) + \gamma_k,\\
&\qquad k \geqslant 3.
\end{aligned}$$

Числа γ_k, $k = 0, 1, \ldots, M-1$, определяются из условия (8).

3. Сделаем в уравнении (9) замену переменной $\xi \to \eta$, функции $Y \to U = (d\eta/d\xi)^{1/2} Y$ и спектрального параметра $\Lambda \to P$ так, чтобы уравнение

(9) преобразовалось к виду

$$U_{\eta}^{\cdot\cdot}+[P-n^{-2M}(a\cos n\eta+b\sin n\eta)]U=0. \qquad (10)$$

Нетрудно показать, что для этого необходимо и достаточно, чтобы функция $\xi(\eta)$, осуществляющая замену переменной, удовлетворяла нелинейному уравнению

$$[\xi'(\eta)]^2[Q_n(x(\xi(\eta)),\gamma)-\Lambda)n^{-2M}+{}^3/_4[\xi''(\eta)/\xi'(\eta)]^2-$$
$$-{}^1/_2\xi'''(\eta)/\xi'(\eta)=-P+n^{-2M}(a\cos n\eta+b\sin n\eta). \qquad (11)$$

Положим

$$P={}^1/_4n^2+pn^{-2M}, \qquad (12)$$

$$\xi(\eta)=\eta+\int\limits_0^\eta\psi(t)\,dt\,n^{-2M-2}. \qquad (13)$$

Тогда уравнение (11) преобразуется к виду

$$\psi''+n^2\psi=2n^2[Q_n(x(\eta),\gamma)-\gamma+p-a\cos n\eta-b\sin n\eta]+$$
$$+n^{-2M}F\left(\psi'n^{-1},\psi,\int\limits_0^\eta\psi(t)\,dt,a,b,\gamma,p,n^{-1}\right). \qquad (14)$$

Явное выражение для функции F нетрудно получить, подставив (13) в (11). Мы хотим определить из уравнения (14) 2π-периодическую функцию $\psi(\eta)$, удовлетворяющую условию

$$\int\limits_0^{2\pi}\psi(\eta)\,d\eta=0, \qquad (15)$$

и числа a, b, γ как функции параметра p.

Фиксируем некоторую окрестность нуля $(-d, d)$.

Лемма 2. *Существует $N=N(d, M, q)$ такое, что при $n\geqslant N$ и $p\in(-d, d)$ уравнение* (14) *имеет решение $\psi(\eta, p, n^{-1})$, $a(p, n^{-1})$, $b(p, n^{-1})$, $\gamma(p, n^{-1})$, удовлетворяющее условию* (15), *и справедливы оценки*

$$a+ib=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}Q_n(x(\eta),\gamma)e^{in\eta}\,d\eta+o(n^{-2M-3}), \qquad (16)$$

$$\gamma=p+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}Q_n(x(\eta),\gamma)\,d\eta+O(n^{-2M-2}), \qquad (17)$$

$$\max_\eta|\psi'(\eta)|\cdot n^{-1}+\max_\eta|\psi(\eta)|=O(1), \qquad (18)$$

равномерные по $p\in(-d, d)$.

Доказательство. Введем в рассмотрение банахово пространство векторных функций $V=(\psi(\eta), a, b, \gamma)$ с нормой

$$\|V\|=\max_\eta|\psi'(\eta)|\cdot n^{-1}+\max_\eta|\psi(\eta)|+n(|a|+|b|)+|\gamma|.$$

Нетрудно получить следующую оценку, которой удовлетворяет функция F из правой части (14):

$$|F(V_1)-F(V_2)|\leqslant C\|V_1-V_2\|; \qquad (19)$$

здесь C не зависит от n и от $p\in(-d, d)$.

Уравнение (14) будем решать методом последовательных приближений, строя последовательность V_k, $k=0, 1, \ldots$, сходящуюся к решению.

Положим $V_0=(0, 0, 0, 0)$. Построив V_k, определим V_{k+1} из уравнения

$$\psi''_{k+1}+n^2\psi_{k+1}=2n^2[Q_n(x(\eta), \gamma_k)-\gamma_{k+1}+p-a_{k+1}\cos n\eta-b_{k+1}\sin n\eta]+n^{-2M}F(V_k). \tag{20}$$

Числа a_{k+1}, b_{k+1} и γ_{k+1} определяются из условия ортогональности правой части (20) функциям $\cos n\eta$, $\sin n\eta$, 1. Это условие является необходимым и достаточным для разрешимости уравнения (20) относительно ψ_{k+1} в классе функций, удовлетворяющих условию (15).

Используя (19), нетрудно вывести оценку

$$\|V_{k+1}-V_k\|\leqslant n^{-1}\cdot\text{const}\cdot\|V_k-V_{k-1}\|. \tag{21}$$

с const, не зависящей от n и $p\in(-d, d)$, которая доказывает сходимость итерационного процесса при достаточно больших n и оценку (18) для решения. Оценки (16) и (17) получаются непосредственно из уравнения (14).

4. В согласии с формулами (6) и (17)

$$|\Delta_n|=\lambda_n^+-\lambda_n^-=n^{-2M}(\gamma_n^+-\gamma_n^-)=$$

$$=n^{-2M}\left(1-n^{-2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{Q}_n(x(\eta))\,d\eta\right)^{-1}(p_n^+-p_n^-)+O(n^{-4M-2}); \tag{22}$$

здесь числа p_n^+ и p_n^- вместе с равенством (12) определяют границы соответствующей лакуны в спектре уравнения (10). Положим $\alpha=(a^2+b^2)^{1/2}$, $\beta=\operatorname{arc\,tg} b/a$. Заменой $n\eta-\beta=2z$ уравнение (10) приводится к уравнению Матье

$$u_{z^2}''+[h-2\vartheta\cos 2z]u=0,$$

где

$$h=1+4pn^{-2M},\quad \vartheta=2\alpha n^{-2M}. \tag{23}$$

Вычисление чисел p_n^+ и p_n^- свелось, таким образом, к отысканию границ h^+ и h^- первой зоны неустойчивости для уравнения Матье. Зависимость h^+ и h^- от параметра ϑ хорошо известна (см. ([3]) или ([4])). Имеет место формула

$$h^\pm=1\pm\vartheta-{}^1/_8\vartheta^2\pm{}^1/_{64}\vartheta^3+\ldots \tag{24}$$

Используя равенства (22)—(24), получаем после некоторых вычислений утверждение теоремы.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
28 VIII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Э. Ч. Титчмарш,* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 2, ИЛ, 1961. [2] *В. А. Якубович, В. М. Старжинский,* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, «Наука», 1972. [3] *Н. В. Мак-Лахлан,* Теория и приложения функций Матье, ИЛ, 1953. [4] *М. Д. О. Стретт,* Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, 1935. [5] *Дж. Хединг,* Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ), М., 1965.