

УДК 531.36:62-50

РЕШЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РЕГУЛИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ

А.В. Лубочкин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

SOLUTION OF THE CLASSICAL REGULATION PROBLEM BY OPTIMAL CONTROLS OF LINEAR-QUADRATIC PROBLEMS

A.V. Lubochkin

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В классе ограниченных управлений рассматривается базовая задача классической теории регулирования. Методами оптимального управления строится алгоритм работы регулятора, реализующего в режиме реального времени обратные связи, которые обеспечивают перевод системы из окрестности одного состояния равновесия в окрестность другого с высоким качеством переходного процесса и стабилизируют систему относительно нового состояния равновесия. Для решения этой задачи предлагается использовать реализацию оптимальной обратной связи линейно-квадратичных задач с ограничениями. Результаты иллюстрируются на примере регулирования линейной динамической системой четвертого порядка.

Ключевые слова: динамическая система, задача регулирования, ограниченная стабилизирующая обратная связь, вспомогательная задача оптимального управления, регулятор.

The basic problem of the classical regulation theory in the bounded control class is considered. Optimal control methods are used to construct the regulator work algorithm. These methods perform feedback implementation in the real-time mode. The feedback transfers the system from one equilibrium condition vicinity into another one with high transient quality. It stabilizes the system according to the new equilibrium condition. To solve the problem the feedback optimal control realization of linear-quadratic problem with restrictions is suggested. The results are illustrated with the example of the linear dynamical system regulation of the fourth order.

Keywords: dynamic system, regulation problem, bounded stabilizing feedback, auxiliary optimal control problem, regulator.

Введение

Задача регулирования – одна из основных задач классической теории автоматического регулирования [1]. Она наряду с задачами стабилизации, демпфирования, осуществления заданных движений стала одним из источников возникновения современной теории управления и, в частности, теории оптимального управления. Теория оптимального управления за более чем полвека прошла огромный путь. Естественен вопрос, что дают методы оптимального управления для решения классических задач теории регулирования, актуальность которых несомненна и в наши дни. Длительное время применение теории оптимального управления к решению таких задач сдерживалось отсутствием эффективных методов синтеза оптимальных систем. Задача регулирования в классической постановке состоит в построении обратной связи, которая переводит динамическую систему из окрестности одного состояния равновесия в окрестность другого и стабилизирует систему относительно нового состояния равновесия. Первая часть задачи регулирования явилась источником возникновения современной теории оптимального управления. Вторая часть задачи исследуется в теории управления в рамках теории стабилизации [2].

При использовании в указанной последовательности результатов теории оптимального управления и теории стабилизации для решения задачи регулирования возникают определенные трудности. Прежде всего, задача точного (с заданной точностью) перевода системы в окрестность нового состояния равновесия за фиксированное время не очень естественна для систем, функционирование которых не прекращается после достижения цели и протекает в условиях постоянно действующих возмущений. Далее следует отметить, что очень трудно задать момент перехода от решения задачи оптимального управления к решению задачи стабилизации. В теории оптимального управления, как правило, исследуются процессы конечной продолжительности, при этом основные результаты получены в форме ограниченных программных управлений, которые не характерны ни для теории стабилизации, ни для классической теории автоматического регулирования, решающих свои задачи созданием подходящих обратных связей. В теории стабилизации и в классической теории автоматического регулирования исследуются процессы неограниченной продолжительности, но без учета ограничений на управления, без требований к качеству переходных процессов.

В данной работе используется метод комплексного решения классической задачи регулирования в обобщенной постановке. Он основан на применении методов оптимального управления и использует результаты, полученные при синтезе оптимальных систем для линейных [3], а также линейно-квадратичных [4]–[6] задач. Новый подход к проблеме конструирования оптимальных обратных связей опирается на разработанные ранее быстрые методы коррекции программных решений и бурное развитие вычислительной техники. В последние годы этот подход осмысливается как управление в реальном времени – вычисление в режиме реального времени значений оптимальной обратной связи без получения ее аналитического выражения. Данную работу можно рассматривать как развитие идей работ [7]–[9], в которых указанные методы оптимального управления были использованы для решения задачи стабилизации. Использованию с целью решения задачи регулирования линейно-негладких задач посвящена работа [10].

1 Постановка задачи

На промежутке $t \geq 0$ рассмотрим динамическую систему с управлением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \quad (1.1)$$

для которой выполняется условие управляемости по Калману:

$$\text{rank}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = n.$$

Здесь $x = x(t)$ – n -вектор состояния системы в момент времени t ; $u = u(t)$ – значение скалярного управляющего воздействия в этот же момент; A , b – постоянные $n \times n$ -матрица и n -вектор, определяющие динамические свойства объекта управления и входного устройства (через которое управление воздействует на динамическую систему, на ее состояние); $x_0 \in R^n$ – начальное состояние системы. Будем считать, что доступными являются лишь ограниченные управления:

$$|u(t)| \leq L, \quad t \geq 0 \quad (0 < L < \infty). \quad (1.2)$$

Обозначим через

$$X_0 = \{x \in R^n : Ax + bu_x = 0, |u_x| \leq L\}$$

множество возможных состояний равновесия системы (1.1). Пусть заданы число $0 < L < \infty$, вектор $z \in \text{int } X_0$, область $G \subset R^n$ ($z \in G$).

Определение. Функция

$$u = u_z(x), \quad x \in G, \quad (1.3)$$

называется ограниченной обратной связью, решающей классическую задачу регулирования для системы (1.1) в области G , если:

- 1) $u_z(z) = u_z$;
- 2) функция $u_z(x)$ удовлетворяет геометрическому ограничению (1.2): $|u_z(x)| \leq L, \quad x \in G$;
- 3) замкнутая система

$$\dot{x} = Ax + bu_z(x), \quad x(0) = x_0 \in G, \quad (1.4)$$

имеет решение $x(t) \in G, \quad t \geq 0$, для всех $x_0 \in G$;

4) состояние равновесия $x(t) \equiv z, \quad t \geq 0$, системы (1.4) асимптотически устойчиво в G .

Очевидно, что таким образом определенная обратная связь может быть построена многими способами. При этом с точки зрения практики естественно потребовать, чтобы дополнительно:

5) область притяжения G состояния равновесия z была достаточно большой;

6) переходные процессы в замкнутой системе (1.4) были в некотором смысле наилучшими (по отношению к выбранному критерию качества).

Суть задачи регулирования состоит в поиске обратной связи, при замыкании которой система приобретает новое устойчивое состояние равновесия. Эта задача не является тривиальной. Нельзя сказать, что она существенно проще задач оптимального управления из-за отсутствия в ней критерия качества. Из-за требований 2), 5), 6) задача регулирования представляет очень сложную математическую проблему. Поскольку геометрические ограничения (1.2) и критерий качества являются неотъемлемыми элементами задач оптимального управления, то при решении задачи регулирования естественно попытаться использовать методы оптимального управления, однако здесь, как и в [7]–[10], задачи оптимального управления являются не основными, а вспомогательными. Основная идея подхода – не сводить задачу регулирования к задаче оптимального управления, а трактовать ее как задачу стабилизации около нового состояния равновесия. Решая последнюю методами оптимального управления, можно автоматически учитывать ограничения на регулирующие воздействия, не задавать структуру обратных связей (она определяется типом вспомогательной задачи оптимального управления), получать большие области притяжения и добиваться сколь угодно высокого качества переходных процессов. Отказ от требования попадания системы с заданной точностью за конечное время в новое состояние равновесия соответствует условиям работы регуляторов в реальных условиях, когда математическая модель неточна, на систему действуют неучтенные возмущения и т.п. Кроме того, при таком подходе принципиально упрощается вид обратной связи – вместо нестационарной обратной связи, характерной для задачи с фиксированной продолжительностью процесса управления, используются стационарные, т.е. не зависящие от времени, обратные связи.

Из-за упомянутой выше сложности задачи регулирования ее решение для достаточно сложных систем (1.1) вряд ли возможно без использования вычислительных устройств дискретного действия – микропроцессоров. В связи с этим

коррекцию значений обратной связи также целесообразно производить в дискретные моменты с определенным тактом $\nu > 0$: $\tau = 0, \nu, 2\nu, \dots, k\nu, \dots$. Строить решение приводимой ниже вспомогательной задачи оптимального управления в моменты коррекции можно в различных классах управлений. Здесь (в качестве простейшего варианта) это решение строится в классе дискретных управлений:

$$u(t) = u(k\nu) \equiv u_k, \quad (1.5)$$

$$t \in [k\nu, (k+1)\nu[, \quad k = 0, 1, \dots$$

Тогда введенная выше «непрерывная» обратная связь (1.3) заменяется «дискретной» обратной связью:

$$u_z^\nu(x), \quad x \in G, \quad (1.6)$$

с заданным периодом квантования $\nu > 0$. При замене в (1.4) непрерывной обратной связи (1.3) дискретной связью (1.6) траектория замкнутой системы

$$\dot{x} = Ax + bu_z^\nu(x), \quad x(0) = x_0, \quad (1.7)$$

представляет собой непрерывное решение уравнения

$$\dot{x} = Ax + bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

где

$$u(t) = u_z^\nu(x(\tau_k)) \equiv u_k, \quad t \in [\tau_k, \tau_k + \nu[,$$

$$\tau_k = k\nu, \quad k = 0, 1, \dots$$

Очевидно, что при использовании дискретной обратной связи (1.6) отпадает вопрос о существовании решения замкнутой системы.

Построение реализации в реальном времени обратной связи $u_z^\nu(x)$, $x \in G$, (1.6) в каждом конкретном процессе управления (регулирования), т. е. вдоль реализующейся в реальном процессе траектории $x^*(t)$, $t \geq 0$, динамической системы, будем вести, используя позиционное решение вспомогательной (сопровождающей) задачи оптимального управления.

2 Сопровождающая задача оптимального управления

Выберем параметр метода Θ , $0 < \Theta < \infty$ и целое число $N > 1$. В классе дискретных управлений $u(t)$, $t \in T = [0, \Theta]$ (1.5) (с периодом квантования $\nu = \Theta / N$):

$$u(t) = u(k\nu) \equiv u_k, \quad (2.1)$$

$$t \in [k\nu, (k+1)\nu[, \quad k = 0, N-1,$$

рассмотрим следующую линейно-квадратичную задачу оптимального управления:

$$B_\Theta(y) = \min_u \int_0^\Theta (u(t) - u_z)^2 dt,$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = y, \quad x(\Theta) = z,$$

$$|u(t)| \leq L, \quad t \in T = [0, \Theta]. \quad (2.2)$$

Решение задачи (2.2) можно строить в различных классах управлений. Известно [11], что

предельным для нее является класс непрерывных кусочно-гладких функций. Здесь, учитывая приведенные выше соглашения, эта задача рассматривается в классе дискретных управлений (2.1).

Допустимой дискретной программой $u_z(t|y)$, $t \in T$ задачи (2.2) называют такую дискретную функцию (2.2), что для нее и соответствующей ей траектории динамической системы выполняются все ограничения задачи (2.2). Оптимальной (дискретной) программой $u_z^0(t|y)$, $t \in T$ задачи (2.2) называют допустимую программу, которая доставляет минимум критерию качества задачи.

Итак, пусть $u_z^0(t|y)$, $t \in T$, – оптимальная (дискретная) программа задачи (2.2), G_Θ – множество всех состояний y , для которых задача (2.2) имеет решение.

Функция

$$u_z(y) = u_z^0(0|y), \quad y \in G_\Theta, \quad (2.3)$$

называется оптимальным стартовым управлением типа обратной связи для задачи (2.2). В [8,9] (для задачи стабилизации линейных систем) описан алгоритм работы регуляторов, которые способны в режиме реального времени строить реализацию

$$u^*(t) = u_z(x^*(t)), \quad t \geq 0,$$

обратной связи (2.3) для каждой реализующейся траектории $x^*(t)$, $t \geq 0$, динамической системы.

В качестве реализации $u_z^\nu(x)$, $x \in G_\Theta$, регулирующей дискретной обратной связи (1.6) и предлагается использовать реализацию $u^*(t)$, $t \geq 0$, оптимальной стартовой обратной связи (2.3). Нетрудно показать, что обратная связь $u_z^\nu(x) = u_z(x)$, $x \in G_\Theta$, решает классическую задачу регулирования, т.е. удовлетворяет всем требованиям п.1.

3 Основные свойства оптимальной обратной связи сопровождающей задачи оптимального управления

Очевидно, что $u_z(z) = u_z^\nu(z) = u_z$, т.е. z – состояние равновесия замкнутой системы (1.7); $|u_z^\nu(x)| \leq L$, $x \in G_\Theta$. По определению дискретной обратной связи замкнутая система (1.7) с $u_z(x) = u_z^\nu(x)$ имеет решение при любом $x_0 \in G_\Theta$.

Используя метод функций Ляпунова, нетрудно показать, что решение $x(t) = z$, $t \geq 0$ системы (1.7) асимптотически устойчиво (при этом $B_\Theta(x)$, $x \in G_\Theta$ – функция Ляпунова). Ясно, что $B_\Theta(z) = 0$, $B_\Theta(x) > 0$ при $x \neq z$; $B_\Theta(x)$, $x \in G_\Theta$ – непрерывная функция.

Докажем, что функция $B_\Theta(x)$, $x \in G_\Theta$ убывает (не возрастает) вдоль каждой траектории

системы (1.7). Для этого с помощью формулы Коши исключим из задачи (2.2) переменные состояния и запишем ее с учетом используемого класса дискретных управлений (2.1) в следующей эквивалентной форме:

$$\sum_{j=0}^{N-1} (u_j - u_z)^2 \rightarrow \min ,$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} u_j \int_{j\nu}^{(j+1)\nu} F(\Theta - t) b dt = z - F(\Theta) y ,$$

$$|u_j| \leq L , j = \overline{0, N-1} . \quad (3.1)$$

Здесь $F(t)$, $t \geq 0$ — фундаментальная матрица решений однородной части системы (1.1): $\dot{x} = Ax$ ($\dot{F} = AF$, $F(0) = E$).

Пусть в произвольный текущий момент $\tau = m\nu$ процесса управления система (1.7) оказалась в состоянии $x^*(\tau | y_0^*)$, которое соответствует начальному состоянию $x(0) = y_0^* \in G_\Theta$ и реализации обратной связи $u^*(t)$, $t \in [0, \tau]$. Для состояния $y = x^*(\tau | y_0^*)$ построим оптимальный план $u_\tau^0(\cdot) = (u_j^0(\tau), j = \overline{0, N-1})$, задачи (3.1). На нем целевая функция задачи (3.1) при $x^*(\tau | y_0^*) \neq z$ принимает значение

$$B_\Theta(x^*(\tau | y_0^*)) = \sum_{j=0}^{N-1} (u_j^0(\tau) - u_z)^2 > 0 .$$

В момент $\tau + \nu$ система (1.7) под действием управления $u^*(t) \equiv u_0^0(\tau)$, $t \in [\tau, \tau + \nu]$ окажется в состоянии

$$x^*(\tau + \nu | y_0^*) = F(\nu)x^*(\tau | y_0^*) + u_0^0(\tau) \int_{\tau}^{\tau + \nu} F(\tau + \nu - t) b dt .$$

Вектор $u_{\tau+\nu}^0(\cdot) = (u_j(\tau + \nu) = u_{j+1}^0(\tau), j = \overline{0, N-2}; u_{N-1}(\tau + \nu) = u_z)$ является планом задачи (3.1), если в ней вектор начального состояния $y = x^*(\tau | y_0^*)$ заменить на $y = x^*(\tau + \nu | y_0^*)$. Значение целевой функции (3.1) на этом плане равно $\sum_{j=0}^{N-1} (u_j(\tau + \nu) - u_z)^2 = B_\Theta(x^*(\tau + \nu | y_0^*)) - (u_0^0(\tau) - u_z)^2$.

Если $u_0^0(\tau) \neq u_z$, то

$$B_\Theta(x^*(\tau + \nu | y_0^*)) < B_\Theta(x^*(\tau | y_0^*)) .$$

При $u_0^0(\tau) = u_z$ имеем

$$B_\Theta(x^*(\tau + \nu | y_0^*)) = B_\Theta(x^*(\tau | y_0^*)) ,$$

и план $u_{\tau+\nu}^0(\cdot)$ будет оптимальным для задачи (3.1). Поскольку $B_\Theta(x^*(\tau | y_0^*)) > 0$, то, учитывая специфику задачи (3.1), имеем $u_1^0(\tau) \neq u_z$, в силу чего получим

$$B_\Theta(x^*(\tau + 2\nu | y_0^*)) < B_\Theta(x^*(\tau | y_0^*)) .$$

Таким образом, функция $B_\Theta(x)$, $x \in G_\Theta$ убывает (не возрастает) вдоль последовательности

$x^*(k\nu)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Предельным значением может быть только нуль. Используя ограниченность управлений и рассуждения, типичные для метода функций Ляпунова, нетрудно показать, что $\|x^*(t | y_0^*)\| \rightarrow z$ при $t \rightarrow \infty$. В приведенных рассуждениях не используется производная функции Ляпунова, поскольку в методе Ляпунова она используется лишь для доказательства монотонного убывания функции Ляпунова, что здесь доказано непосредственно.

Далее, нетрудно показать, что с помощью выбора параметра Θ множество G_Θ можно построить почти совпадающим с областью управляемости в z системы (1.1), т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\Theta < \infty$, что в ε -окрестности множества G_Θ будут содержаться все состояния, из которых можно вдоль траекторий системы (1.1) попасть в состояние z с помощью управлений, ограниченных по модулю числом L .

Качество переходных процессов в замкнутой системе определяется следующим экстремальным свойством:

$$\int_0^\infty (u^*(t) - u_z)^2 dt \leq \int_0^\Theta (u_z^0(t | y_0^*) - u_z)^2 dt .$$

Последнее неравенство означает, что затрачиваемая энергия на весь процесс регулирования (на бесконечном промежутке времени) не превосходит минимальной энергии на процесс перевода системы (1.1) в состояние равновесия z за время Θ .

4 Алгоритм работы регулятора

Пусть начальное состояние x_0 системы (1.1) известно: $x_0 = x_0^*$. На начальном промежутке времени $[0, \nu]$ регулятор использует оптимальную (дискретную) программу $u_z^0(t | x_0^*)$, $t \in T$, задачи (2.2) или, что то же самое, оптимальный план $(u_j^0(0), j = \overline{0, N-1})$ эквивалентной ей (в выбранном классе управлений) задачи (3.1) при $y = x_0^*$. Эта задача содержит лишь априорную информацию, и поэтому указанный оптимальный план может быть построен заранее, до начала процесса управления в момент $\tau = 0$, не взирая на затраты машинного времени (полное решение). Строить решение задачи (3.1) можно разными методами. Здесь (с целью единообразия алгоритма) этот план предлагается строить с помощью двойственного метода квадратичного программирования [12], поскольку в дальнейшем именно этот метод применяется для коррекции решений близких задач (3.1). Управление

$$u^*(t) = u_z^0(t | x_0^*) \equiv u_z^0(0 | x_0^*) \equiv u_0^0(0) , t \in [0, \nu] ,$$

подается на вход системы (1.1):

$$u(\tau) = u^*(\tau) , \tau \in [0, \nu] ,$$

и порождает ее состояние $x^*(\nu) = x^*(\nu | x_0^*)$.

Предположим, что регулятор проработал в моменты $0, \nu, \dots, (s-1)\nu$, были вычислены значения обратной связи $u_0^0(0), u_0^0(\nu), \dots, u_0^0((s-1)\nu)$ и замкнутая система (1.7) оказалась в состоянии $x^*(\tau) = x^*(\tau | x^*(\tau-\nu))$, $\tau = s\theta$. В предыдущий момент коррекции $\tau-\nu = (s-1)\nu$, когда система находилась в состоянии $x^*(\tau-\nu) = x^*(\tau-\nu | x^*(\tau-2\nu))$, регулятор уже решил задачу с $y = x^*(\tau-\nu)$. Задача (3.1) для двух соседних моментов $\tau-\nu$ и τ отличается только начальными условиями $x^*(\tau-\nu)$, $x^*(\tau)$, и это отличие тем меньше, чем меньше ν . Поэтому наиболее эффективным методом решения задачи (3.1) является метод коррекции с помощью двойственного метода квадратичного программирования [12]. Построив оптимальную программу $u_z^0(t | x^*(s\nu))$, $t \in T$, задачи (2.2) – оптимальный план $(u_j^0(s\nu), j = \overline{0, N-1})$ задачи (3.1) с $y = x^*(s\nu)$, получаем реализацию

$$u^*(t) \equiv u_z^0(0 | x^*(s\nu)) \equiv u_0^0(s\nu), t \in [0, \nu],$$

стартовой обратной связи, которая подается на вход системы (1.1) на промежутке времени $[s\nu, (s+1)\nu]$: $u(\tau) = u^*(\tau - s\nu)$, $\tau \in [s\nu, (s+1)\nu]$.

Если время, необходимое для коррекции решения задачи (3.1) при переходе от $y = x^*(\tau-\nu)$ к $y = x^*(\tau)$, а, значит, и для вычисления $u^*(\tau)$, не превосходит ν , то можно говорить о решении задачи регулирования в режиме реального времени. Поскольку количество операций, которые выполняются на каждом шаге работы регулятора, нетрудно оценить, то для каждой конкретной системы можно подобрать такие микропроцессорные устройства, с помощью которых можно реализовать регулятор в режиме реального времени. С другой стороны, для каждого микропроцессора можно указать порядок систем, для которых реализуем этот режим.

5 Пример

Рассмотрим задачу регулирования для крана, перемещающего висащий на тросе груз из одного состояния равновесия в окрестность другого (рисунок 1):

$$\begin{aligned} & \text{Линеаризованная модель задачи имеет вид:} \\ & (M+m)\ddot{x} - mH\ddot{\varphi} = u, \quad I\ddot{\varphi} + mgH\varphi = mH\ddot{x}, \quad (5.1) \\ & x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0, \quad x(t) \rightarrow z, \\ & \dot{x}(t) \rightarrow 0, \quad \varphi(t) \rightarrow 0, \quad \dot{\varphi}(t) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где x – отклонение крана от старого положения равновесия, φ – отклонение троса от вертикали, M – масса крана, m – масса груза, H – рас-

стояние от крана до центра инерции груза, $I = mH^2$ – момент инерции груза относительно точки подвеса.

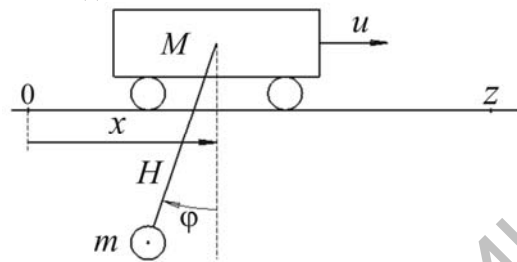


Рисунок 1

Введя обозначения: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \varphi$, $x_4 = \dot{\varphi}$ и проведя несложные преобразования, запишем систему (5.1) в эквивалентной нормальной форме:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad (5.2)$$

$$\dot{x}_2 = [(M+m)I - m^2H^2]^{-1}(Iu - m^2H^2gx_3),$$

$$\dot{x}_4 = [(M+m)I - m^2H^2]^{-1}(mHu - (M+m)mgHx_3).$$

Возможными состояниями равновесия системы (5.1) в пространстве состояний являются элементы множества $X_0 = \{(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}) : \dot{x} = 0, \varphi = 0, \dot{\varphi} = 0\}$, т. е. любые точки фазового пространства на оси Ox , при этом, очевидно, $u_z = 0$.

Выберем следующие параметры системы (5.1): $M = 7, m = 3, H = 3, g = 10, I = mH^2 = 27$. Тогда система (5.2) примет вид:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_3 = x_4,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{30}{7}x_3 + \frac{1}{7}u, \quad \dot{x}_4 = -\frac{30}{7}x_3 + \frac{1}{7}u. \quad (5.3)$$

При заданном $z = 6$, используя (5.3), нетрудно сформировать сопровождающую задачу вида (2.2):

$$\int_0^\Theta u^2(t) dt \rightarrow \min, \quad (5.4)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_3 = x_4,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{30}{7}x_3 + \frac{1}{7}u, \quad \dot{x}_4 = -\frac{30}{7}x_3 + \frac{1}{7}u;$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 0;$$

$$x_1(\Theta) = 6, \quad x_2(\Theta) = 0, \quad x_3(\Theta) = 0, \quad x_4(\Theta) = 0;$$

$$|u(t)| \leq L, \quad t \in T = [0, \Theta].$$

Используя фундаментальную матрицу решений системы (5.3)

$$F(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & -\frac{9}{10} + \frac{9}{10}f_1 & -\frac{9t}{10} + \frac{9\sqrt{21}}{100}f_2 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{\sqrt{21}}f_2 & -\frac{9}{10} + \frac{9}{10}f_1 \\ 0 & 0 & f_1 & \frac{\sqrt{21}}{10}f_2 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{\sqrt{21}}f_2 & f_1 \end{bmatrix},$$

где $f_1 = \cos\left(\frac{10}{\sqrt{21}}t\right)$, $f_2 = \sin\left(\frac{10}{\sqrt{21}}t\right)$, нетрудно свести задачу (5.4) к эквивалентной ей (в классе дискретных управлений (2.1)) задаче квадратичного программирования вида (3.1):

$$\sum_{j=0}^{N-1} u_j^2 \rightarrow \min, \\ \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij} u_j = b_i, \quad i = \overline{1, 4}; \\ |u_j| \leq L, \quad j = \overline{0, N-1}, \quad (5.5)$$

где

$$a_{1j} = \frac{1}{10} \Theta v - \frac{1}{20} [((j+1)v)^2 - (jv)^2] + \\ + \frac{9}{1000} \left[\cos\left(\frac{10}{\sqrt{21}}(\Theta - (j+1)v)\right) - \right. \\ \left. - \cos\left(\frac{10}{\sqrt{21}}(\Theta - jv)\right) \right],$$

$$a_{2j} = \frac{1}{10} v + \frac{9\sqrt{21}}{100} \left[\sin\left(\frac{10}{\sqrt{21}}(\Theta - jv)\right) - \right. \\ \left. - \sin\left(\frac{10}{\sqrt{21}}(\Theta - (j+1)v)\right) \right],$$

$$a_{3j} = \frac{1}{100} \left[\cos\left(\frac{10}{\sqrt{21}}(\Theta - (j+1)v)\right) - \right. \\ \left. - \cos\left(\frac{10}{\sqrt{21}}(\Theta - jv)\right) \right],$$

$$a_{4j} = \frac{1}{10\sqrt{21}} \left[\sin\left(\frac{10}{\sqrt{21}}(\Theta - jv)\right) - \right. \\ \left. - \sin\left(\frac{10}{\sqrt{21}}(\Theta - (j+1)v)\right) \right];$$

$$b_1 = 6 - y_1 - \Theta y_2 + \frac{9}{10} \left(1 - \cos\left(\frac{10}{\sqrt{21}}\Theta\right) \right) y_3 + \\ + \left(\frac{9}{10} \Theta - \frac{9\sqrt{21}}{100} \sin\left(\frac{10}{\sqrt{21}}\Theta\right) \right) y_4,$$

$$b_2 = -y_2 + \frac{3\sqrt{21}}{7} \sin\left(\frac{10}{\sqrt{21}}\Theta\right) y_3 + \\ + \frac{9}{10} \left(1 - \cos\left(\frac{10}{\sqrt{21}}\Theta\right) \right) y_4,$$

$$b_3 = -\cos\left(\frac{10}{\sqrt{21}}\Theta\right) y_3 - \frac{\sqrt{21}}{10} \sin\left(\frac{10}{\sqrt{21}}\Theta\right) y_4,$$

$$b_4 = \frac{10}{\sqrt{21}} \sin\left(\frac{10}{\sqrt{21}}\Theta\right) y_3 - \cos\left(\frac{10}{\sqrt{21}}\Theta\right) y_4;$$

y_j , $j = \overline{1, 4}$ – компоненты вектора начальных условий y .

Алгоритм работы регулятора программно реализован на языке С, работоспособность

программы проверена на описанном примере. Были построены регуляторы для двух наборов параметров сопровождающей задачи (5.5):

- 1) $\Theta = 10$, $v = 0.4$, $L = 2.5$;
- 2) $\Theta = 6$, $v = 0.24$, $L = 7$.

Результаты работы регуляторов представлены на рисунке 2 и рисунке 3. Кривые 1 соответствует первому набору параметров, кривые 2 – второму набору.

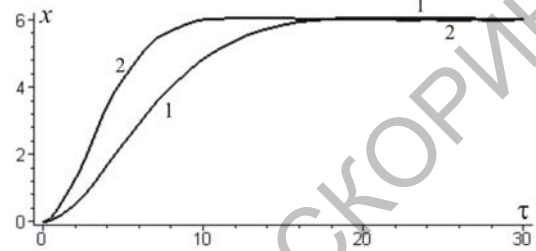


Рисунок 2 – Положение крана в процессе регулирования

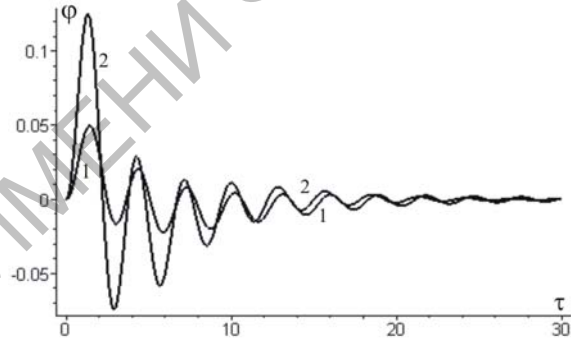


Рисунок 3 – Отклонение троса в процессе регулирования

Работа регулятора испытывалась также в случае постоянного действия на систему неизвестных ему возмущений. Результаты работы регулятора (со вторым набором параметров) при действии на второе уравнение системы возмущения $w^*(t) = 0.2 \sin 2t$, $t \geq 0$, приведены на рисунке 4 и рисунке 5 – кривые 3. На эти рисунки перенесены также (для сравнения) соответствующие кривые 2 из рисунка 2 и рисунка 3. На рисунке 4 (иллюстрация изменения положения крана) кривые, соответствующие процессам с возмущением и без него, практически совпадают.

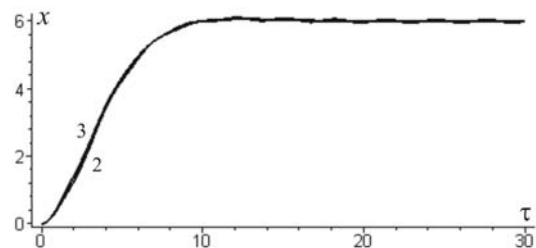


Рисунок 4 – Положение крана в процессе регулирования с возмущением

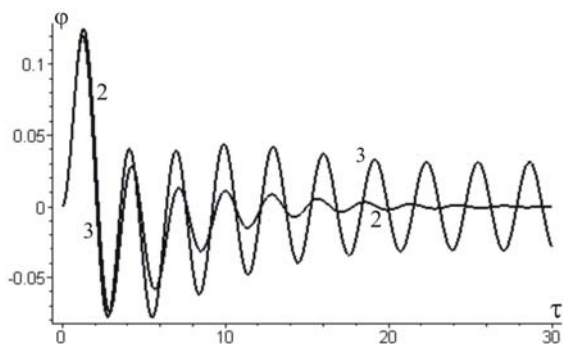


Рисунок 5 – Отклонение троса в процессе регулирования с возмущением

Заключение

В работе показано, что методами оптимального управления с привлечением современных средств вычислительной техники можно эффективно решить в обобщенной постановке до сих пор актуальную задачу регулирования, которая более полвека назад послужила толчком к созданию теории оптимального управления. Построенные регуляторы способны вычислять значения регулирующей обратной связи в режиме реального времени, при этом с успехом парируя многие ограниченные неизвестные регулятору возмущения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман, М.А. Лекции по теории автоматического регулирования / М.А. Айзерман. – М.: Физматгиз, 1958.
2. Красовский, Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений / Н.Н. Красовский // Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин. – М.: Наука, 1966. – С. 475–514.
3. Габасов, Р. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1992. – № 4. – С. 3–19.
4. Габасов, Р. Синтез регулятора для одной линейно-квадратичной задачи оптимального управления / Р. Габасов, А.В. Лубочкин // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 9. – С. 3–14.
5. Кириллова, Ф.М. Синтез оптимального управления в линейно-квадратичной задаче с ограничениями / Ф.М. Кириллова, А.В. Лубочкин // Доклады РАН. – 1997. – Т. 356, № 6. – С. 736–739.
6. Лубочкин, А.В. Дискретная реализация позиционного решения в линейно-квадратичной задаче с ограничениями / А.В. Лубочкин // Известия ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель. – 2003. – № 3 (18). – С. 32–37.
7. Габасов, Р. К методам стабилизации динамических систем / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1994. – № 3. – С. 67–77.
8. Габасов, Р. Стабилизация линейных динамических систем оптимальными управлениями линейно-квадратичных задач / Р. Габасов, А.В. Лубочкин // Прикладная математика и механика. – 1998. – Т. 62, Вып. 4. – С. 556–565.
9. Лубочкин, А.В. Стабилизация линейных динамических систем с помощью позиционных решений линейно-квадратичных задач с ограничениями / А.В. Лубочкин // Известия ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель. – 2006. – № 4 (37). – С. 39–42.
10. Габасов, Р. Решение классической задачи регулирования методами оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Е.А. Ружицкая // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 6. – С. 18–29.
11. Лубочкин, А.В. Построение оптимального (по среднеквадратичной интенсивности управления) переходного процесса в линейной системе) / А.В. Лубочкин // Конструктивные методы оптимизации. Ч. 4. Выпуклые задачи / Р. Габасов [и др.]. – Мн.: Университетское, 1987. – С. 218–222.
12. Ракецкий, В.М. Решение общей задачи выпуклого квадратичного программирования двойственным методом / В.М. Ракецкий // Программное обеспечение ЭВМ. – Мн.: Ин-т математики АН БССР, 1985. – Вып. 55. – С. 124–129.

Поступила в редакцию 02.06.10.