Доклады Академии наук СССР
1974. Том 216, № 2

УДК 517.946.8 *МАТЕМАТИКА*

Член-корреспондент АН СССР А. В. БИЦАДЗЕ, В. И. ПАШКОВСКИЙ

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА — ЭЙНШТЕЙНА

Ряд задач современной математической физики сводится к изучению следующего варианта уравнений Максвелла — Эйнштейна:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial \bar z}+\frac{1}{2(z+\bar z)}\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial \bar z}\right)-\frac{2}{w+\bar w}\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial \bar z}=0, \qquad (1)$$

где

$$w=u(x,y)+iu_1(x,y),\quad z=x+iy,\quad \bar z=x-iy,$$

$$2\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y},\quad 2\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что наряду с w решениями уравнения (1) являются и функции $\bar w$, $1/w$, cw, где c — произвольная действительная постоянная. Очевидно также, что решения уравнения $2(z+\bar z)\partial w/\partial \bar z=w+\bar w$ являются решениями и уравнения (1). Ниже в квадратурах выписываются еще два класса решений уравнения (1).

В предположении

$$w\bar w=A^2, \qquad (2)$$

где A — постоянная, для определения действительной части $u(x,y)$ решения w уравнения (1) имеем

$$\Delta u+\frac{1}{x}u_x-\frac{1}{u}\left(1-\frac{u^2}{A^2-u^2}\right)(u_x^2+u_y^2)=0. \qquad (3)$$

Функции вида $w=u(x,y)+i(A^2-u^2(x,y))^{1/2}$, где $u(x,y)$ — решение уравнения (3), составляют класс решений уравнения (1).

При знакопостоянных $u(x,y)$ в результате замены

$$u=A\operatorname{sch}\mu A v, \qquad (4)$$

где μ — произвольная действительная постоянная, получаем линейное уравнение относительно $v(x,y)$:

$$x\Delta v+v_x=0. \qquad (5)$$

Аналитические по x, y решения $v(x,y)$ уравнения (5) даются формулой

$$v^{(1)}(x,y)=\operatorname{Re}\int_0^1 f(y+ix-2itx)\frac{dt}{[t(1-t)]^{1/2}}, \qquad (6)$$

где $f(\tau)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного τ ([1], [2]).

Формула

$$v^{(2)}(x,y)=\operatorname{Re}\int_0^1 \varphi(y+ix-2itx)\frac{\log 2ixt(1-t)}{[t(1-t)]^{1/2}}dt, \qquad (7)$$

где $\varphi(\tau)$ — произвольная аналитическая функция, дает аналитические по x, y решения уравнения (5) в правой полуплоскости $x>0$, с логарифмической особенностью при $x=0$.

Из формул (6), (7) получается полный набор решений уравнения (5):

$$v_n^{(1)}(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=[(k+1)/2]}^{[n/2]}(-1)^{k+l}\binom{n}{k}\binom{n-k}{2l-k}\frac{2^k\Gamma(k+{}^1/_2)\Gamma({}^1/_2)}{k!}y^{n-2l}x^{2l},$$

$$v_n^{(2)}(x,y)=v_n^{(1)}(x,y)\log x+\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=[(k+1)/2]}^{[n/2]}(-1)^{k+l}\binom{n}{k}\binom{n-k}{2l-k}\frac{2^k}{k!}\times$$

$$\times\Gamma(k+{}^1/_2)\Gamma({}^1/_2)[\psi(k+{}^1/_2)-2\psi(k+1)+\psi({}^1/_2)]y^{n-2l}x^{2l},\quad n=0,1,\ldots,$$

где Γ и ψ — функции Эйлера.

Формулы (6) и (7) позволяют исследовать разные задачи для уравнения (5). Допуская особенности у аналитических функций $f(\tau)$ и $\varphi(\tau)$, получим решения уравнения (5) с определенными особенностями и, следовательно, на основании (2) и (4) можно судить о характере соответствующих решений уравнения (1).

Другой класс решений уравнения (1) составляют функции $w=u(x,y)+iB$, где $B=\mathrm{const}$, а $u(x,y)$ — решение уравнения

$$\Delta u+\frac{1}{x}u_x-\frac{1}{u}(u_x^2+u_y^2)=0. \tag{8}$$

Очевидно, что функции вида $u=e^{\lambda v}$, где λ — произвольная действительная постоянная, являются решениями уравнения (8), если только $v(x,y)$ — решение уравнения (5).

В приложениях порой ищутся решения уравнения (1) с данной асимптотикой при $z\to\infty$, на что внимание авторов обратил Р. Мейнхардт (см. также ([3])). В этих случаях построенные выше классы решений могут оказаться полезными.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
16 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Darboux*, Leçons sur la theorie generale des surfaces et les applications géometriques du calcul infinitésimal. Part 2, Paris, 1915, p. 66. [2] *И. Н. Векуа*, Новые методы решения эллиптических уравнений, М., 1948, стр. 53. [3] *W. B. Bonnor*, Comm. math. phys., v. 34, № 1, 77 (1973).